Урок 4. Кинематика. Свободное падение

Важным частным случаем равноускоренного движения является свободное падение. Так называется движение тела вблизи поверхности Земли без учёта сопротивления воздуха.

Свободное падение тела, независимо от его массы, происходит с постоянным ускорением свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Почти во всех задачах при расчётах полагают $g = 10$ м/с2.

Давайте разберём несколько задач и посмотрим, как работают выведенные нами формулы для равноускоренного движения.

Задача. Найти скорость приземления дождевой капли, если высота тучи $h = 2$ км.

Решение. Направим ось OY вертикально вниз, расположив начало отсчёта в точке отрыва капли. Воспользуемся формулой

$$s_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y}.$$

Имеем: $s_y = h, v_y = v$ - искомая скорость приземления, $v_{0y} = 0, a_y = g$. Получаем: $h^2 = \frac{v^2}{2g}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Вычисляем: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2000} = 200$м/с. Это 720 км/ч, порядка скорости пули.

На самом деле капли дождя падают со скоростью порядка нескольких метров в секунду. Почему такое расхождение? Сопротивление воздуха!

Задача. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Найти его скорость через $t = 5$с.

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Используем формулу

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Здесь $v_{0y} = v_0, a_y = -g$, так что $v_y = v_0 - gt$. Вычисляем: $v_y = 30 - 10 \cdot 5 = -20$м/с. Значит, скорость будет равна 20 м/с. Знак проекции указывает на то, что тело будет лететь вниз.

Задача. С балкона, находящегося на высоте $h = 15$м, бросили вертикально вверх камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время камень упадёт на землю?

Решение. Направим ось OY вертикально вверх, поместив начало отсчёта на поверхности Земли. Используем формулу

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Имеем: $y = 0, y_0 = h, v_{0y} = v_0, a_y = -g$, так что $0 = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 15 + 10t - 5t^2$, или $t^2 - 2t - 3 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $t = 3$ с.

Горизонтальный бросок

Равноускоренное движение не обязательно является прямолинейным. Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально.

Предположим, что тело брошено горизонтально со скоростью v_0 с высоты h. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории происходит движение.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 1.

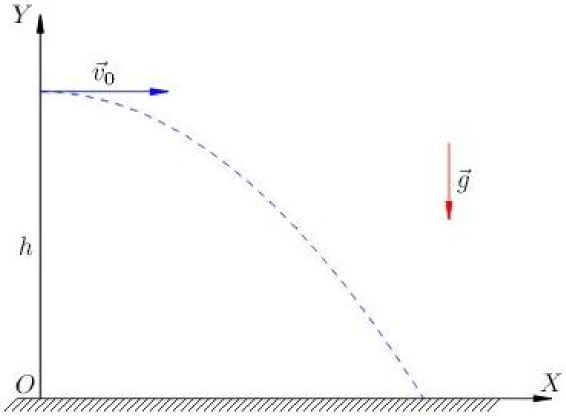

Рис. 1. Горизонтальный бросок

Используем формулы:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

В нашем случае $x_0 = 0, v_{0x} = v_0, a_x = 0, y_0 = h, v_{0y} = 0, a_y = -g$. Получаем:

$$x = v_0 t, y = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (11)$$

Время полёта T найдём из условия, что в момент падения координата тела y обращается в нуль:

$$y(T) = 0 \Rightarrow h - \frac{gT^2}{2} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Дальность полёта L - это значение координаты x в момент времени T:

$$L = x(T) = v_0 T = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Уравнение траектории получим, исключая время из уравнений (11). Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе:

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = h - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Получили зависимость y от x, которая является уравнением параболы. Следовательно, тело летит по параболе.

Бросок под углом к горизонту

Рассмотрим несколько более сложный случай равноускоренного движения: полёт тела, брошенного под углом к горизонту.

Предположим, что тело брошено с поверхности Земли со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Найдём время и дальность полёта, а также выясним, по какой траектории двигается тело.

Выберем систему координат OXY так, как показано на рис. 2.

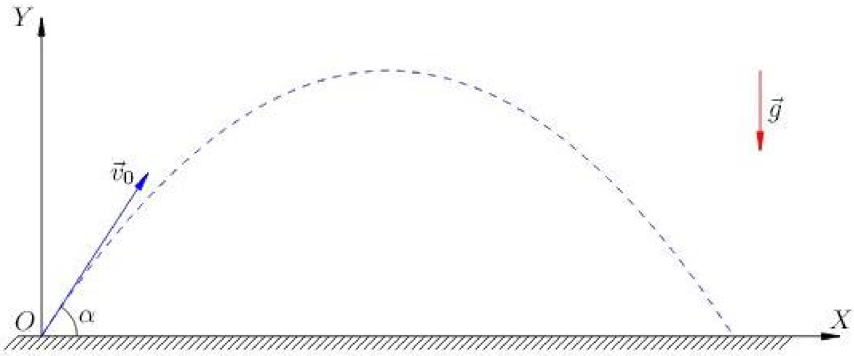

Рис. 2. Бросок под углом к горизонту

Начинаем с уравнений:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В нашем случае $x_0 = y_0 = 0, v_{0x} = v_0 cos\alpha, v_{0y} = v_0 sin\alpha, a_x = 0, a_y = -g$. Получаем:

$$x = (v_0 cos\alpha)t, y = (v_0 sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Дальше действуем так же, как и в случае горизонтального броска. В результате приходим к соотношениям:

$$T = \frac{2v_0 sin\alpha}{g},$$

$$L = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g},$$

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha}.$$

(Обязательно проделайте эти вычисления самостоятельно!) Как видим, зависимость y от x снова является уравнением параболы.Попробуйте также показать, что максимальная высота подъёма определяется формулой:

$$H = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}.$$