

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 16 (С2): СТЕРЕОМЕТРИЯ. МНОГОГРАННИКИ

Основные теоремы и формулы стереометрии

Аксиомы стереометрии

Аксиома 1. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

Аксиома 2. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.*

В этом случае говорят, что *прямая лежит в плоскости* или что *плоскость проходит через прямую*.

Из аксиомы 2 следует, что прямая, не лежащая в плоскости, не может иметь с плоскостью более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что *прямая пересекает плоскость*.

Аксиома 3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки этих плоскостей.*

В этом случае говорят, что *плоскости пересекаются по прямой*.

Аксиома 4. *В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.*

Таким образом, в любой плоскости пространства можно использовать все доказанные теоремы и формулы из планиметрии.

Некоторые следствия из аксиом

Следствие 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.*

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.*

Следствие 3. *Через две параллельные прямые проходит плоскость и притом только одна.*

Теоремы о параллельности прямой и плоскостей

1. Если прямая AB (рис. 1) параллельна какой-нибудь прямой CD , расположенной в плоскости P , то она параллельна самой плоскости.

2. Если плоскость R (рис. 2) проходит через прямую AB , параллельную другой плоскости P , и пересекает эту плоскость, то линия пересечения CD параллельна первой прямой AB .

3. Если две параллельные плоскости P и Q (рис. 2) пересекаются третьей плоскостью R , то линии пересечения AB и CD параллельны.

4. Если две пересекающиеся прямые AB и DC (рис. 3) одной плоскости соответственно параллельны двум прямым A_1B_1 и C_1D_1 другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

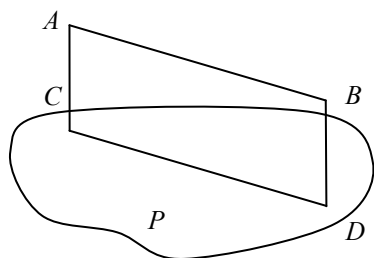


Рис. 1

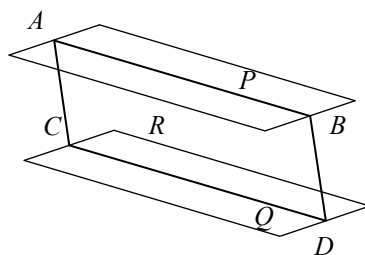


Рис. 2

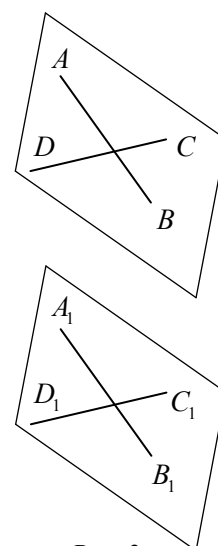


Рис. 3

Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости

1. Для того что бы прямая AB (рис. 4) была перпендикулярна плоскости P , необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна двум произвольным непараллельным прямым CD и EF , лежащим в этой плоскости.

2. Для того, чтобы прямая DE (рис. 5) проведенная на плоскости P через основание наклонной AC была ей перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна к проекции BC , наклонной на плоскость P . (Достаточное условие этой теоремы называется «Теоремой о трех перпендикулярах»: AC, BC, DE .).

3. Если две прямые AB и CD (рис. 6) перпендикулярны одной плоскости P , то они параллельны между собой.

4. Если две плоскости P и Q (рис. 7) перпендикулярны одной прямой AB , то они параллельны друг другу.

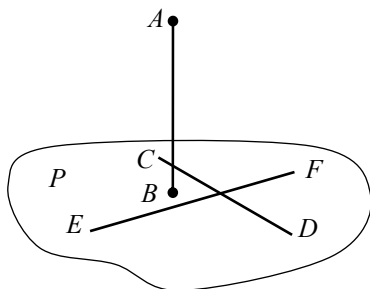


Рис. 4

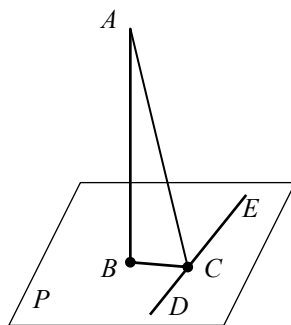


Рис. 5

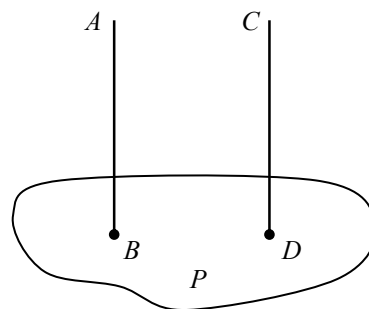


Рис. 6

Теоремы о перпендикулярности плоскостей

1. Если плоскость P проходит через перпендикуляр к другой плоскости Q (рис. 8), то плоскость P перпендикулярна плоскости Q .

2. Если две плоскости P и Q взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости или в разных плоскостях.

– Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

– Две прямые в пространстве называются *пересекающимися*, если они лежат в одной плоскости и имеют общую точку.

– Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Скрещивающиеся прямые

1. Угол α между скрещивающимися прямыми AB и CD (рис. 9) определяется как угол между одной из этих прямых (например, CD) и любой прямой A_1B_1 , проходящей через ее произвольную точку E параллельно другой прямой.

2. Расстояние h между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как кратчайшее расстояние от одной из этих прямых и может быть найдено как расстояние от одной из этих прямых (например, AB) до плоскости P , проходящей через другую прямую CD параллельно первой.

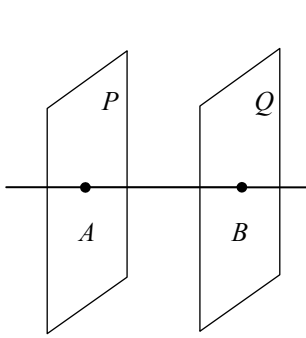


Рис. 7

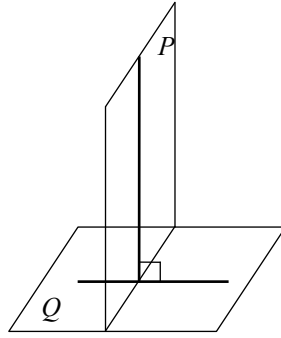


Рис. 8

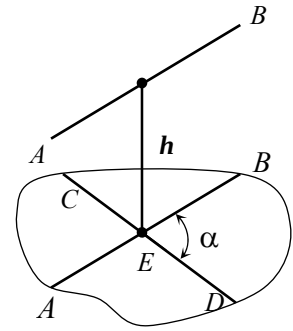


Рис. 9

Расстояние между фигурами — наименьшее из расстояний между точками этих фигур.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине перпендикулярного к ним обоих отрезка, с концами на этих прямых. Для любых двух скрещивающихся прямых такой отрезок существует и единственен.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от одной из них до параллельной ей плоскости, проходящей через вторую прямую.

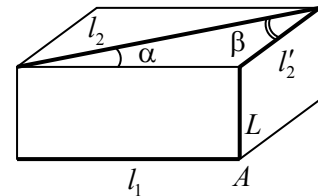
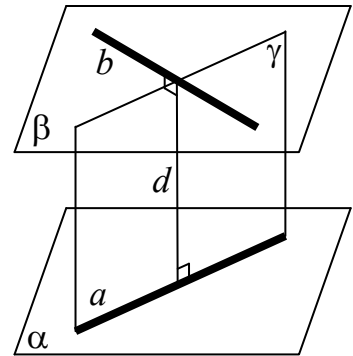
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них.

Другими словами, если l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые (см. рис.), L — плоскость, перпендикулярная одной из них, например l_1 , точка A — проекция прямой l_1 на плоскость L , прямая l'_2 — проекция прямой l_2 на плоскость L , то расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A до прямой l'_2 . При этом общий перпендикуляр между прямыми l_1 и l_2 проектируется в перпендикуляр, проведенный из точки A на прямую l'_2 .

Высказанное утверждение достаточно очевидно. Чтобы убедиться в его справедливости, можно, например, провести через прямую l_2 плоскость π , параллельную прямой l_1 . Тогда прямая l'_2 есть линия пересечения плоскостей L и π .

Предложенная конструкция позволяет находить и угол между скрещивающимися прямыми: если α — угол между прямыми l_1 и l_2 , а β — угол между прямой l_2 и плоскостью L (см. рис, $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\beta \leq \frac{\pi}{2}$), то $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Таким образом, взяв на прямой l отрезок длиной d и найдя d' — длину его проекции на плоскость L , получим $\sin \alpha = \frac{d'}{d}$.



Двугранные углы

1. Пересечение двух полупространств, границами которых служат непараллельные плоскости P и Q (рис. 10) называется двугранным углом.

2. Ограничивающие двугранный угол плоскости P и Q называются его гранями, а прямая AB , являющаяся общей границей этих плоскостей — ребром двугранного угла.

3. Пересечение двугранного угла и плоскости S , перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом двугранного угла (рис. 11). Величиной φ двугранного угла называется величина его линейного угла, т. е. величина угла между прямыми CD и CE , перпендикулярными ребру AB двугранного угла.

4. Величину меньшего из двугранного углов, определяемых двумя пересекающимися плоскостями, называют углом между этими плоскостями. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0° ; если они перпендикулярны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

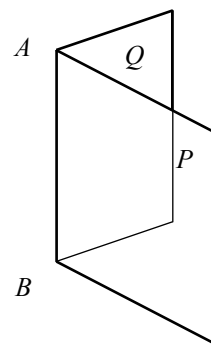


Рис. 10

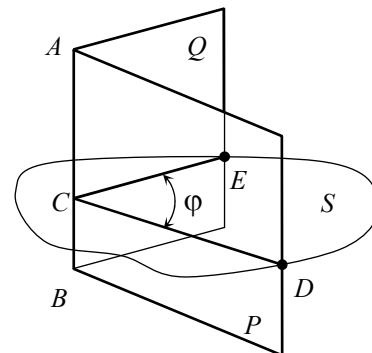


Рис. 11

Трехгранные углы

1. Объединение всех лучей, имеющих общее начало S , и пересекающих данный треугольник ABC , называются трёхгранным углом.

2. Величина каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы величин двух других его плоских углов: $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$.

3. В трехгранном угле сумма величин всех его плоских углов меньше 2π ($\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$). Двугранные углы φ , ψ , θ , образованные гранями трехгранного угла, выражаются через плоские углы α , β и γ при его вершине формулами:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}, \\ \cos \theta &= \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}.\end{aligned}$$

Где φ — величина двугранного угла, противолежащего грани с плоским углом γ ; ψ — грани с плоским углом β ; θ — грани с плоским углом α .

Основные геометрические места точек в пространстве

1. Геометрическим местом точек, удаленных на расстояние R от данной точки O , является сфера радиуса R с центром в этой точке.

2. Геометрическим местом точек пространства равно удаленных от двух данных точек A и B (рис. 12), является плоскость P , перпендикулярная к отрезку прямой, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

3. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех данных точек A , B и C (рис. 13) пространства, не лежащих на одной прямой, является прямая MN , перпендикулярная плоскости P , в которой лежат эти точки, и проходящая через центр окружности, проведенной через эти точки.

4. Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является так называемая «биссекторная плоскость» P (рис. 14), проходящая через ребро AB двугранного угла и пересекающая любой линейный угол двугранного угла CAD по биссектрисе l .

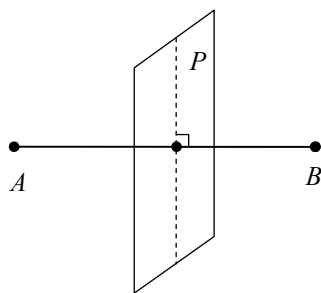


Рис. 12

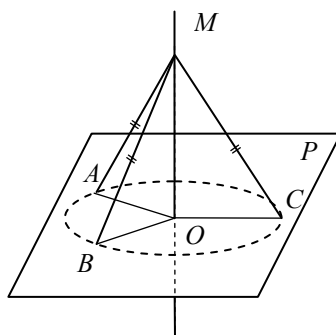


Рис. 13

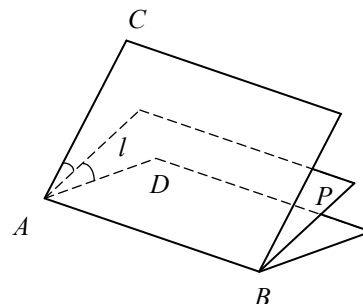


Рис. 14

Площадь ортогональной проекции многоугольника

Площадь $S_{пр}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади S_{ϕ} проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла ϕ между плоскостями многоугольника и его проекции $S_{пр} = S_{\phi} \cdot \cos \phi$.

Многогранники

Пусть G — фигура на плоскости. Фигура G называется *областью* (или *связной фигурой*), если любые две ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре G . Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Пусть G — область на плоскости. Точка X плоскости называется *границей точкой* для области G , если имеются сколь угодно близкие к X точки, принадлежащие фигуре G , и точки, не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется ее *границей*. Например, границей шара является сфера. Точка фигуры, не являющаяся граничной, принадлежит ей и называется *внутренней точкой фигуры*. Все точки пространства, достаточно близкие к внутренней, так же принадлежат фигуре.

Если соединить область G и ее граничные точки, то мы получим новую фигуру G . Она называется *замкнутой областью*.

Геометрическим телом (или просто *телом*) называется *ограниченная связная фигура в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причем сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры*. Границу геометрического тела называют также его *поверхностью* и говорят, что поверхность ограничивает тело.

Плоскость, по обе стороны которой имеются точки данного тела, называется *секущей плоскостью*. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью, называется *сечением тела*.

Многогранником или *многогранной поверхностью* называется *поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело*. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называют его *гранями*. Стороны граней называются *ребрами*, а концы ребер — *вершинами* многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

Многогранники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Призма

Призмой называется многогранник, две грани которого n -угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Боковые ребра призмы, как противоположные стороны параллелограммов, последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой* призмы. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* призмы.

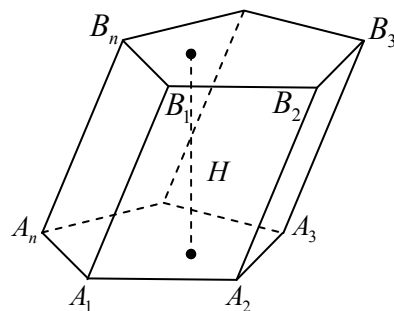
Поверхность призмы состоит из *оснований* и *боковой поверхности* призмы. Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*. В противном случае призма называется *наклонной*.

У прямой призмы боковые грани — прямоугольники.

Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если она прямая, и ее основания — правильные многоугольники.



Площадь поверхности и объём призмы

Пусть H — высота призмы, A_1B_1 — боковое ребро призмы, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания призмы, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности призмы, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности призмы, V — объем призмы, $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения призмы, $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения призмы. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= P_{\perp} A_1 B_1, \\ S_{\text{полн}} &= 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \\ V &= S_{\text{осн}} H. \end{aligned}$$

Для *прямой призмы*, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований, площадь боковой поверхности и объем даются формулами:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= P_{\text{осн}} H, \\ V &= S_{\text{осн}} H. \end{aligned}$$

Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм.

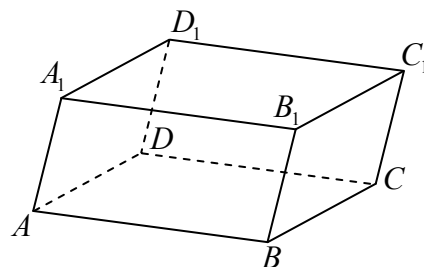
Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются его *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины параллелограммов — *вершинами параллелепипеда*. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть *прямыми* и *наклонными*.

Обычно выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их *основаниями*, а остальные грани — *боковыми гранями параллелепипеда*. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называют *боковыми ребрами*.

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются *смежными*, а не имеющие общих ребер — *противоположными*.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю параллелепипеда*.



Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.

Свойства параллелепипеда:

1. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.
2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.
4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Пирамида

Пирамидой называется многогранник одна из граней которого является произвольным многоугольником, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды.

Тетраэдр — это пирамида, в основании которой лежит треугольник.

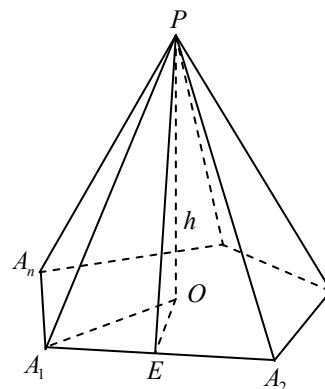
Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются его гранями, их стороны — ребрами, а вершины — вершинами тетраэдра. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. Обычно выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее основанием, а остальные грани называют боковыми гранями.

Правильным тетраэдром называют тетраэдр у которого все ребра равны.

Правильной пирамидой называется такая пирамида, если ее основание — правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого многоугольника. Прямая, содержащая высоту правильной пирамиды называется ее осью.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой.

Усеченная пирамида (см. далее) называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами усеченной пирамиды.



Свойства пирамиды:

Рассмотрим девять утверждений.

1. Боковые ребра пирамиды равны.
2. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию пирамиды.
3. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.
4. Высоты всех боковых граней пирамиды, проведенные из вершины пирамиды, равны, а высота пирамиды лежит внутри пирамиды.
5. Все двугранные углы при основании пирамиды равны.
6. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.
7. Высоты всех боковых граней пирамиды, проведенные из вершины пирамиды, равны, а высота пирамиды лежит вне пирамиды.
8. Двугранные углы между боковыми гранями и плоскостью основания пирамиды равны.
9. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, невписанной в основание пирамиды.

Утверждения 1, 2, 3 равносильны, утверждения 4, 5, 6 равносильны, утверждения 7, 8, 9 равносильны.

Свойства правильной пирамиды:

1. В правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны.
2. Боковые ребра правильной пирамиды равны между собой.
3. Двугранные углы при основании правильной пирамиды равны между собой.
4. Двугранные углы при боковых ребрах правильной пирамиды равны.

Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию

- Сечение пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию (перпендикулярной высоте) делит высоту и боковые ребра пирамиды на пропорциональные отрезки.
- Сечение пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию (перпендикулярной высоте) есть многоугольник, подобный основанию пирамиды, причем коэффициент подобия этих многоугольников равен отношению их расстояний от вершины пирамиды.
- Площади сечений, параллельных основанию пирамиды, относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

Площадь поверхности и объём пирамиды

Пусть h — высота пирамиды, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания пирамиды, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности пирамиды, V — объём пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

Если все двугранные углы при основании пирамиды равны β , а высоты всех боковых граней пирамиды, проведенные из вершины пирамиды, равны $h_{\text{бок}}$, то

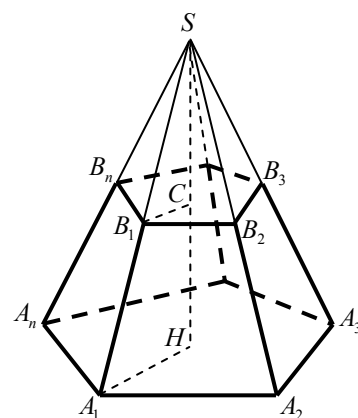
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h_{\text{бок}}, \quad S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta}.$$

Усечённая пирамида

Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого вершинами служат вершины основания и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.

Свойства усечённой пирамиды:

1. Основания усечённой пирамиды — подобные многоугольники.
2. Боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.
3. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
4. Боковые грани правильной усечённой пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
5. Двугранные углы при боковых ребрах правильной усечённой пирамиды равны.



Площадь поверхности и объём усечённой пирамиды:

Пусть CH — высота усечённой пирамиды, P_1 и P_2 — периметры оснований усечённой пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований усечённой пирамиды, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности усечённой пирамиды, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности усечённой пирамиды, V — объём усечённой пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}, \quad V = \frac{1}{3} CH (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Если все двугранные углы при основании усеченной пирамиды равны β , а высоты всех боковых граней пирамиды равны $h_{\text{бок}}$, то:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_{\text{бок}}, \quad S_{\text{бок}} = \frac{|S_1 - S_2|}{\cos \beta}.$$

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Все ребра правильного многогранника равны, все двугранные углы правильного многогранника равны, все многогранные углы правильного многогранника равны. Существует ровно пять выпуклых правильных многогранников:

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон, и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Все ребра правильного многогранника равны друг другу. Равны также все его двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.

Грани правильного многогранника могут быть либо равносторонними треугольниками, либо квадратами, либо правильными пятиугольниками. Действительно, угол правильного n -угольника при $n \geq 6$ не меньше 120° . С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани — правильные n -угольники при $n \geq 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360° .

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

1. *Правильный тетраэдр (четырёхгранник)* — многогранник, составленный из четырех правильных треугольников (рис. А).

2. *Правильный гексаэдр (шестигранник)* или *куб* — многогранник, составленный из шести правильных четырехугольников (квадратов) (рис. Б).

3. *Правильный октаэдр (восьмигранник)* — многогранник, составленный из восьми правильных треугольников (рис. В).

4. *Правильный додекаэдр (двенадцатигранник)* — многогранник, составленный из двенадцати правильных пятиугольников (рис. Г).

5. *Правильный икосаэдр (двадцатигранник)* — многогранник, составленный из двадцати правильных треугольников (рис. Д).

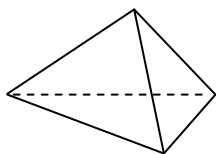


Рис. А

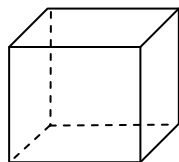


Рис. Б

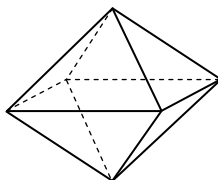


Рис. В

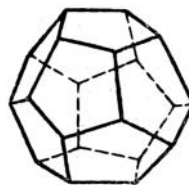


Рис. Г



Рис. Д