

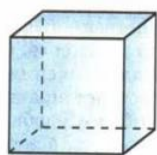
## Тема 2.1. Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей.

### Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом.

1. *Предмет стереометрии.* Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости.

**Стереометрия** – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» – объемный, пространственный и «метрео» - измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются **точки, прямые и плоскости**. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать так называемые **геометрические тела** и их **поверхности**. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками**. Одним из простейших многогранников является **куб**. Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром**. Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром**.



а)

Куб



б)

Шар



в)

Цилиндр

с. 1

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отдельную от остальной части пространства поверхностью - **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть **сфера**, а граница цилиндра состоит из двух кругов - оснований цилиндра и боковой поверхности.

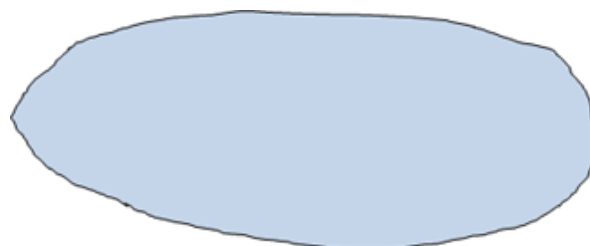
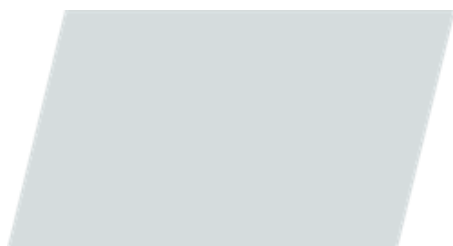
Изучая свойства геометрических фигур – воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое дает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств.

2. *Аксиомы стереометрии.* В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура – **плоскость**. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены, лист бумаги, школьная доска.



Как правило, такие предметы имеют прямоугольную форму, но если посмотреть на эти предметы под углом и на большом расстоянии, то они покажутся нам параллелограммами. Поэтому чаще всего, плоскости изображают параллелограммами или просто в виде произвольной области.

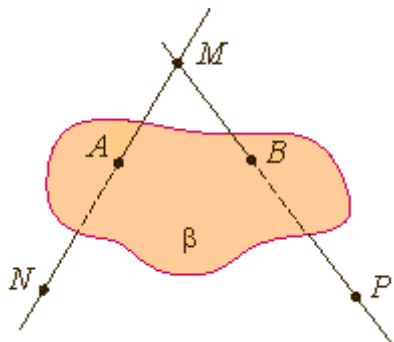


Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами  $A, B, C$  и т. д., а прямые – строчными латинскими буквами  $a, b, c$  и т. д. или двумя прописными

латинскими буквами  $AB, CD$  и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma$  и т. д.

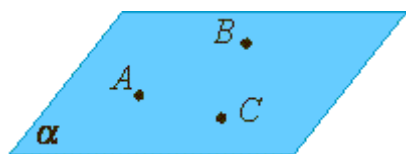
Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости.



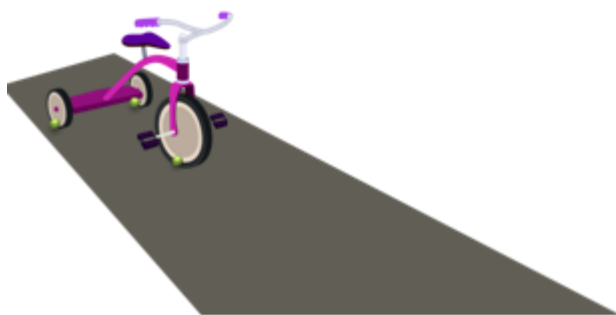
Точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $\beta$  (плоскость  $\beta$  проходит через эти точки), а точки  $M, N, P$  не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так:  $A \in \beta, B \in \beta, M \notin \beta, N \notin \beta, P \notin \beta$ .

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Напомним, что **аксиома** – утверждение, не требующее доказательства. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены  $A_1, A_2, A_3$ .

**Аксиома 1 ( $A_1$ ).** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

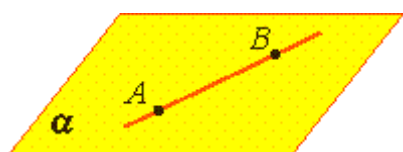


Примером этой аксиомы может служить детский велосипед с тремя колесами. Если мы обозначим место соприкосновения колес с дорожкой точкой, то получим три точки, которые задают плоскость дорожки. Благодаря этому трехколесный велосипед устойчиво стоит на дорожке.



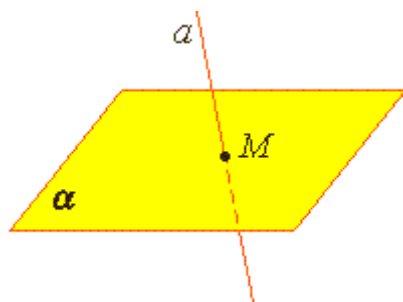
**Аксиома 2 ( $A_2$ ).** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

В таком случае говорят, что **прямая лежит на плоскости** или **плоскость проходит через прямую**.



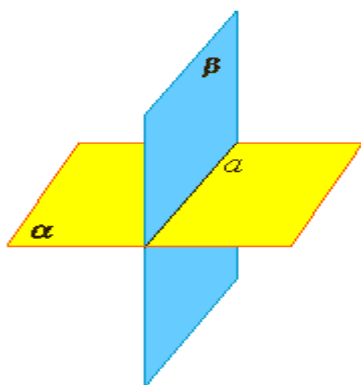
Вторую аксиому можно использовать для проверки ровности стола. Для этого надо взять линейку и приложить ее краем к поверхности стола, если поверхность стола ровная, то просветов между линейкой и столом не будет, а если поверхность стола не совсем ровная, то будут зазоры между линейкой и столом.

Из аксиомы 2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что они **пересекаются**.



**Аксиома 3 ( $A_3$ ).** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

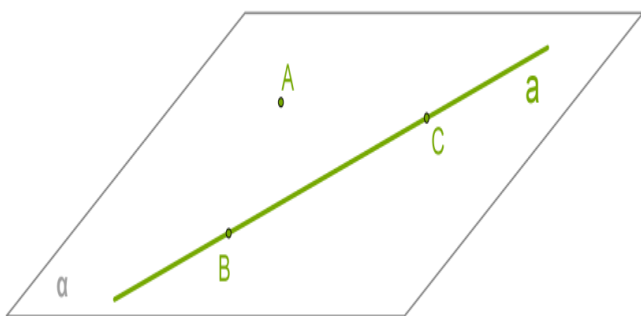
В таком случае говорят, что **плоскости пересекаются по прямой**.



Наглядной иллюстрацией аксиомы 3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка комнаты.

### 3. Некоторые следствия из аксиом.

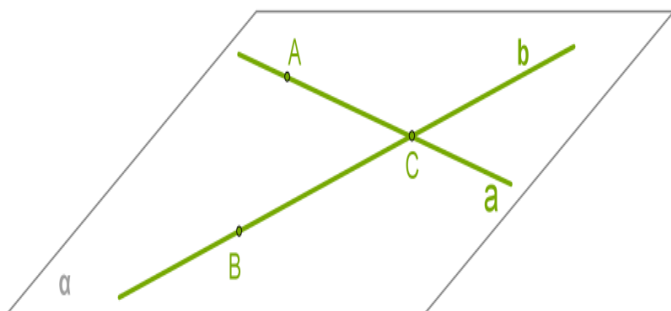
**Теорема 1.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



Доказательство:

- 1) Рассмотрим прямую  $a$  и точку  $A$ , которая не находится на этой прямой.
- 2) На прямой  $a$  выберем точки  $B$  и  $C$ .
- 3) Так как все 3 точки не находятся на одной прямой, из второй аксиомы следует, что через точки  $A, B, C$  и можно провести одну единственную плоскость  $\alpha$ .
- 4) Точки прямой  $a, B$  и  $C$ , лежат на плоскости  $\alpha$ , поэтому из третьей аксиомы следует, что плоскость проходит через прямую  $a$  и, конечно, через точку  $A$ .

**Теорема 2.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и при том только одна.



Доказательство:

- 1) Рассмотрим прямые  $a$  и  $b$ , которые пересекаются в точке  $C$ .
- 2) Выберем точку  $A$  на прямой  $a$  и точку  $B$  на прямой  $b$  так, чтобы эти точки не совпадали с точкой  $C$ .
- 3) Из второй аксиомы следует, что через точки  $A, B$  и  $C$  можно провести одну единственную плоскость  $\alpha$ . В таком случае прямые  $a$  и  $b$  находятся на плоскости  $\alpha$  (судя по третьей аксиоме).

Практические задания:

1. Прочитать записи и сделать схематический рисунок.

а)  $A \in \alpha, a \subset \alpha, A \notin a$ .

б)  $a \cap \alpha = A, b \cap \alpha = B$ .

2. По рисунку 1 выберите верные утверждения.

а)  $m \in \beta, F \in m, Q \notin m$ ;

б)  $m \subset \beta, F \in m, Q \notin m$ ;

в)  $m \not\subset \beta, F \in m, Q \notin m$ ;

г)  $m \subset \beta, F \in m, Q \in m$ ;

д)  $m \not\subset \beta, F \notin m, Q \in m$ .

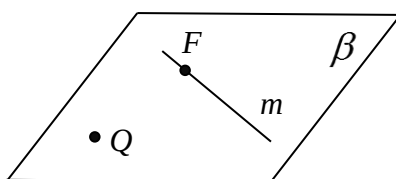
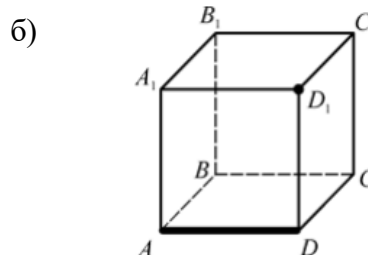
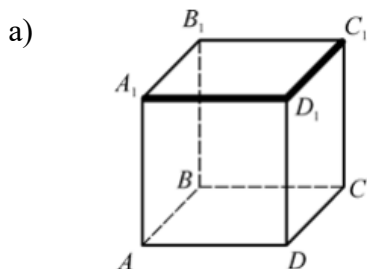
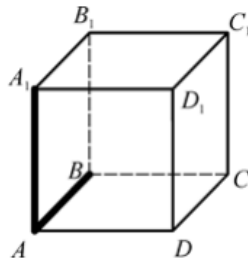


Рис. 1

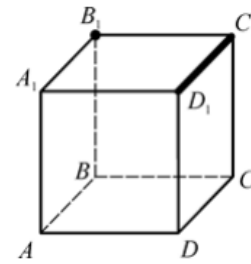
3. Сколько плоскостей, соответствующих граням куба, можно провести через выделенные элементы? Назовите эти плоскости.



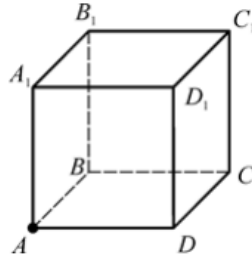
в)



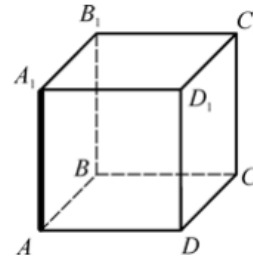
г)



д)



е)



4. По рисунку 2:

а) назовите плоскости, в которых лежат прямые  $PE$ ,  $MK$ ,  $DB$ ,  $AB$ ,  $EC$ ;

б) назовите точки пересечения прямой  $DK$  с плоскостью  $(ABC)$ , прямой  $CE$  с плоскостью  $(ADB)$ ;

в) назовите точки, лежащие в плоскостях  $(ADB)$  и  $(DBC)$ ;

г) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости  $(ABC)$  и  $(DCB)$ ,  $(ABD)$  и  $(CDA)$ ,  $(PDG)$  и  $(ABC)$ .

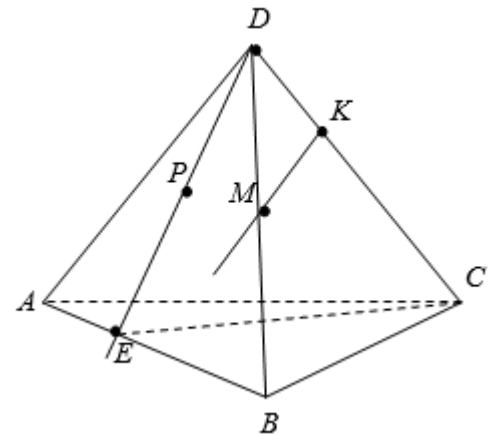


Рис. 1

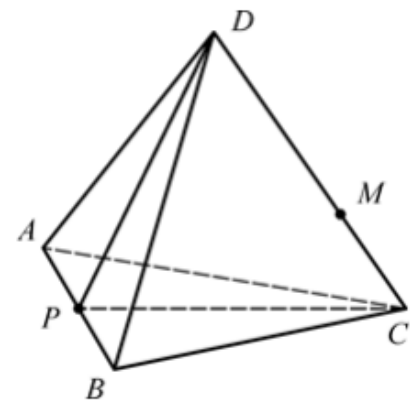
5. По рисунку 3:

а) назовите, каким плоскостям принадлежат точки  $A$ ,  $P$ ,  $C$ ,  $M$ ;

б) назовите, каким плоскостям принадлежат прямые  $AD$ ,  $PD$ ,  $PC$ ;

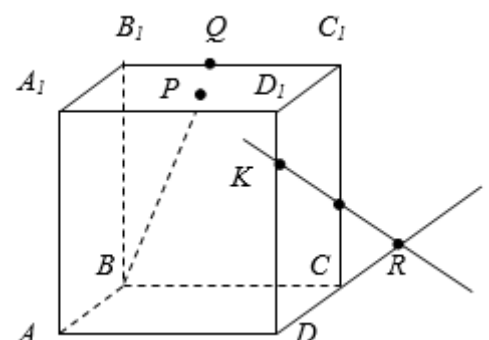
в) назовите, в какой точке пересекаются прямая  $AD$  и плоскость  $(BDC)$ ,  $AB$  и  $(BDC)$ ,  $AB$  и  $(PDC)$ ,  $DM$  и  $(ABC)$ ;

г) назовите, по какой прямой пересекаются



плоскости  $(ABC)$  и  $(ADC)$ ,  $(ABD)$  и  $(PDC)$ ,  $(ABC)$  и  $(PDC)$ .

6. По рисунку 4:



- а) назовите точки, лежащие в плоскостях  $(DCC_1)$  и  $(BQC)$ ;  
 б) назовите плоскости, в которых лежат прямая  $AA_1$ ;  
 в) назовите точки пересечения прямой  $MK$  с плоскостью  $(ABD)$ , прямых  $DK$  и  $BP$  с плоскостью  $(A_1B_1C_1)$ ;

Рис. 2

- г) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости  $(AA_1B_1)$  и  $(ACD)$ ,  $(PB_1C_1)$  и  $(ABC)$ ;  
 д) назовите точки, пересечения прямых  $MK$  и  $DC$ ,  $B_1C_1$  и  $BP$ ,  $C_1M$  и  $DC$ .

7. По рисунку 5:

- а) назовите, каким плоскостям принадлежат точки  $K, L, M, N, Q$ ;  
 б) назовите, каким плоскостям принадлежат прямые  $KL, QN, D_1M$ ;  
 в) назовите, в какой точке пересекаются прямая  $KL$  и плоскость  $(DD_1C_1)$ ,  $DC$  и  $(BB_1C_1)$ ,  $QN$  и  $(BB_1C_1)$ ,  $QN$  и  $(A_1B_1C_1)$ ,  $MD_1$  и  $(AA_1D_1)$ ;  
 г) назовите, по какой прямой пересекаются плоскости  $(A_1B_1C_1)$  и  $(DD_1C_1)$ ,  $(KLN)$  и  $(A_1B_1C_1)$ ,  $(KLN)$  и  $(DD_1C_1)$ ,  $(KLN)$  и  $(BB_1C_1)$ .

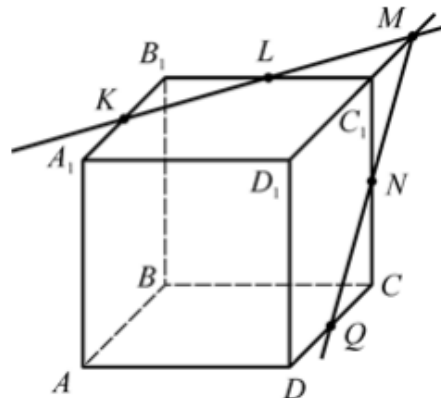
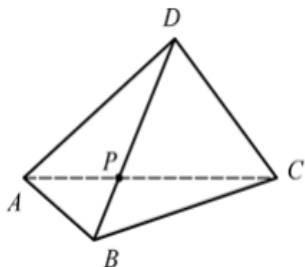


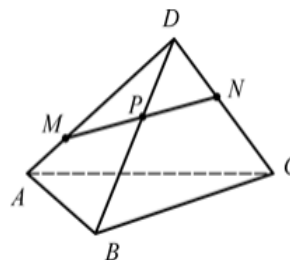
Рис. 3

8. Найдите ошибку в изображении. Обоснуйте ответ.

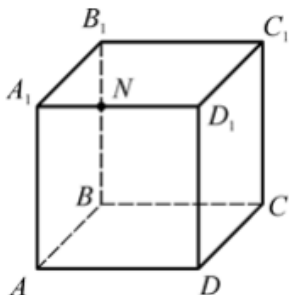
а)



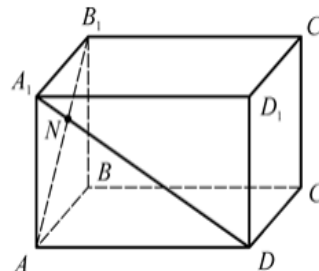
б)



в)



г)



9. Две прямые пересекаются в точке  $B$ . Доказать, что все прямые, которые пересекают данные прямые и не проходят через точку  $B$ , лежат в одной плоскости.