

9. СДВИГ. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

9.1. Понятие о чистом сдвиге

Чистый сдвиг – плоское напряженное состояние, при котором по всем четырем граням прямоугольного элемента действуют только касательные напряжения.

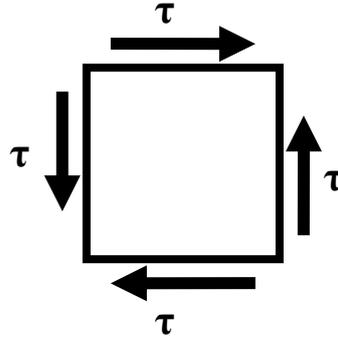


Рис. 9.1. Плоское напряженное состояние – чистый сдвиг

Эти грани носят название – **площадки чистого сдвига**.

Это **идеальный** вид напряженного состояния, который на практике не встречается. Но теоретическое рассмотрение чистого сдвига позволит нам получить ряд важных зависимостей.

Экспериментально чистый сдвиг можно получить *при закручивании тонкостенной трубки* внешним скручивающим моментом m (рис. 9.2), условно закрепив, например, ее нижнее сечение.

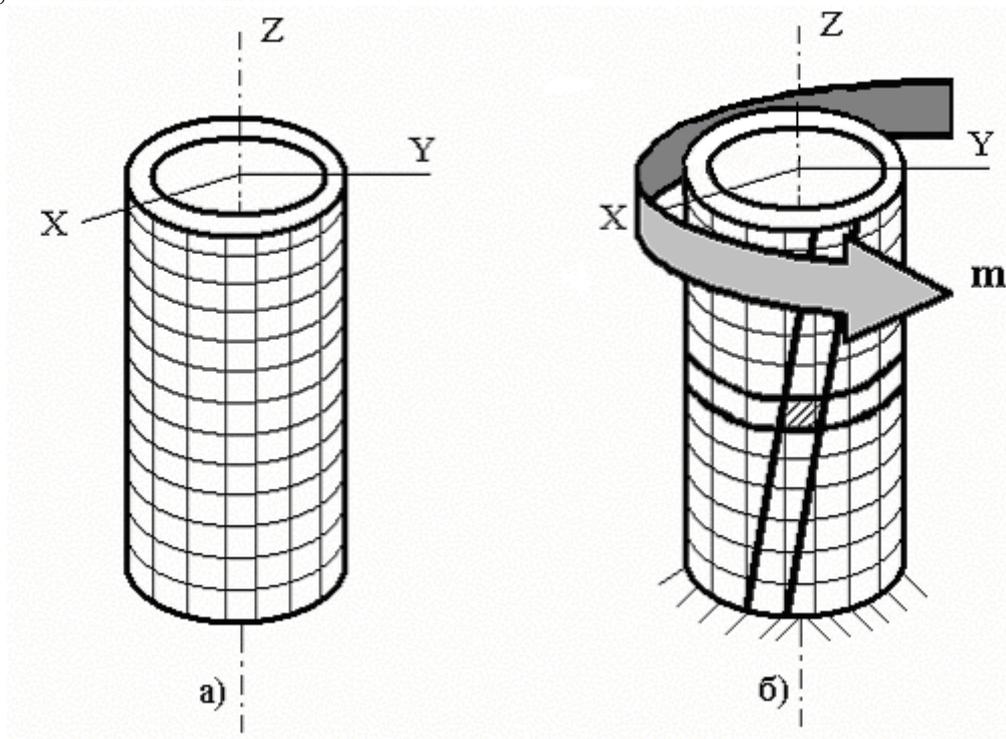


Рис. 9.2. Кручение тонкостенной трубки

Если на боковой поверхности такой трубки *до нагружения* провести окружности и линии, параллельные оси (рис. 9.2 а), то после нагружения последние повернутся на некоторый угол, не искривляясь. При этом между этими линиями и окружностями, проведенными на поверхности трубки, можно увидеть элемент, представляющий собой плоскую фигуру – ромб (рис. 9.2 б). На этом рисунке для наглядности жирными линиями выделены только соседние, произвольные, пары упомянутых линий (ромб заштрихован). Как покажем ниже, такую форму примет квадрат после приложения к его граням касательных напряжений.

9.2. Исследование плоского напряженного состояния при чистом сдвиге

9.2.1. Главные напряжения. Для анализа чистого сдвига используем уравнения, полученные в теории напряженного состояния (НС) для случая плоского НС (рис. 9.3).

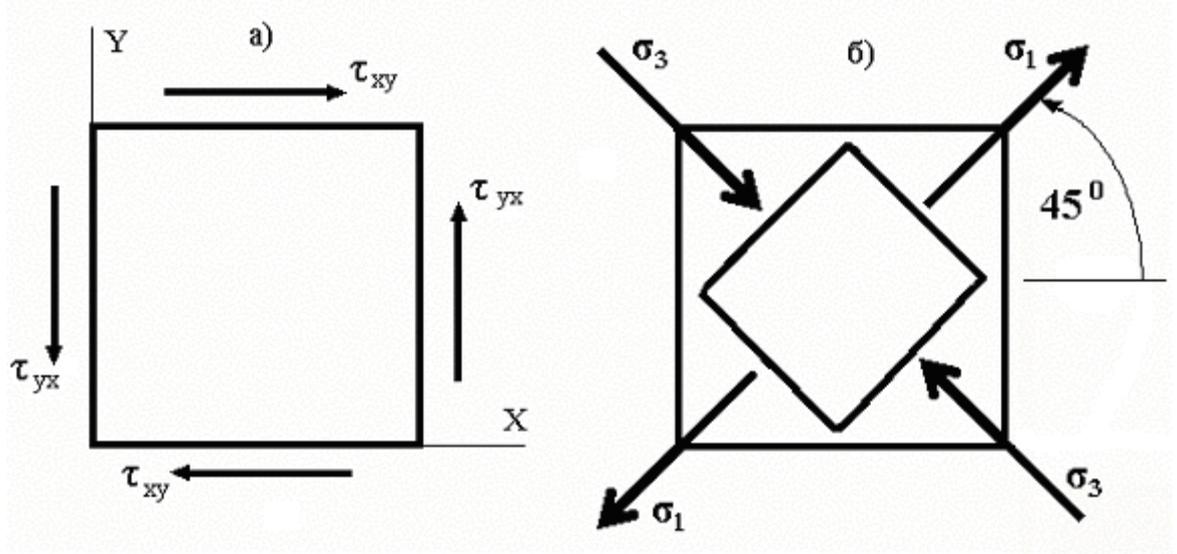


Рис. 9.3. К анализу плоского напряженного состояния – чистого сдвига

Поскольку в данном случае (рис. 9.3 а):

$$\sigma_x = \sigma_y = 0; \tau_{xy} = \tau_{yx}, (\tau_{xy} = +\tau, \tau_{yx} = -\tau),$$

то из формулы

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = -\tau, \quad \sigma_2 = 0. \quad (9.1)$$

Положение главных площадок определим по известной нам формуле

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(\tau)}{0} = +\infty. \quad (9.2)$$

Направление касательного напряжения может меняться, поэтому в общем случае для искомого угла имеем знак \pm . Таким образом, угол наклона главных площадок к площадкам чистого сдвига (рис.9.3 б) равен $2\alpha_0 = \pm 90^\circ$, $\alpha_0 = \pm 45^\circ$.

Главные напряжения равны по величине касательным и действуют по площадкам (помним, что они называются главными площадками), **наклоненным к площадкам чистого сдвига под углом 45°** .

Чистый сдвиг представляет собой единственный случай напряженного состояния, при котором экстремальные значения нормальных и касательных напряжений по абсолютной величине равны между собой.

9.2.2. Относительное изменение объема. В соответствии с теорией напряженного состояния, относительное изменение объема определяется по формуле

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

При чистом сдвиге, с учетом соотношений (9.1), получим:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\tau + 0 - \tau) = 0. \quad (9.3)$$

Чистый сдвиг является единственным напряженным состоянием, при котором **объем тела** при его нагружении **не изменяется**.

9.2.3. Условие прочности при чистом сдвиге. При чистом сдвиге по граням элемента действуют только касательные напряжения, поэтому логично проверку прочности вести по касательным напряжениям.

Для проверки прочности при чистом сдвиге необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (9.4)$$

Поскольку напряженное состояние сложное, для решения задачи используем теории прочности.

В соответствии с **III теорией прочности** $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.

С учетом значений главных напряжений (9.1)

$$\tau - (-\tau) \leq [\sigma], \quad 2\tau \leq [\sigma]; \quad \tau \leq 0,5[\sigma].$$

Таким образом, $[\tau]^{\text{III}} = 0,5[\sigma]. \quad (9.5)$

В соответствии с **IY теорией прочности:**

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma];$$

С учетом (9.1) имеем $\sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma].$

Тогда $[\tau]^{\text{IY}} = 0,6[\sigma]. \quad (9.6)$

Материал бруса сопротивляется сдвигу значительно хуже, чем растяжению.

9.2.4. Удельная потенциальная энергия деформации. Потенциальная энергия, которая накапливается в единице объема при деформации сдвига, может быть определена по формуле, полученной при рассмотрении теории напряженного состояния:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)].$$

С учетом соотношений (9.1):

$$u = \frac{1}{2E} [\tau^2 + 0 + \tau^2 - 2\mu(-\tau^2)] = \frac{\tau^2(1 + \mu)}{E}. \quad (9.7)$$

9.3. Закон Гука при чистом сдвиге

9.3.1. Рассмотрим деформацию грани элемента $ABCD$ (рис. 9.4).

Грань AD считаем закрепленной. Для упрощения примем, что элемент квадратный – со стороной равной a .

Под действием касательных напряжений произойдет деформация элемента. После деформации элемент примет вид AB_1C_1D . Верхняя грань BC сместится относительно нижней на величину $CC_1 = BB_1$.

Величина абсолютного линейного смещения этой грани обозначается ΔS и называется **абсолютным сдвигом**.

Вследствие этого смещения прямые углы граней квадрата исказятся на величину γ . Как видно из чертежа

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (9.8)$$

Т.к. в действительные деформации весьма малы, то можно принять, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma.$$

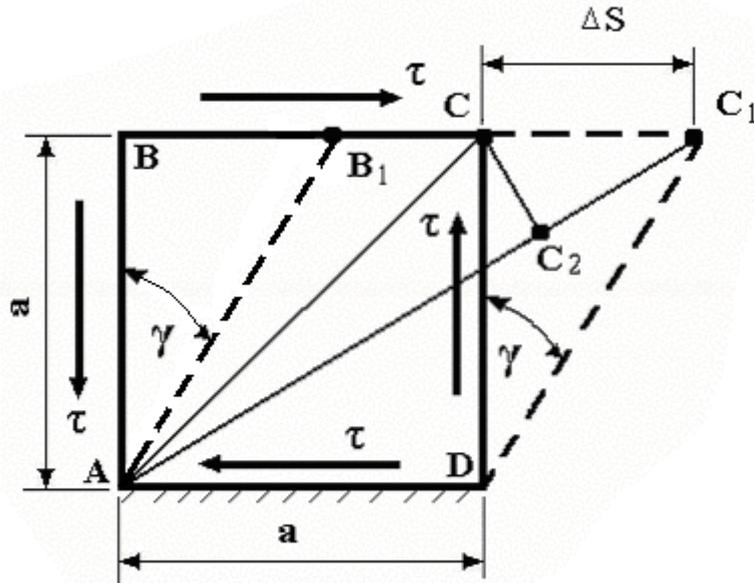


Рис. 9.4. К выводу соотношений линейных и угловых деформаций при чистом сдвиге

Тогда

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (9.9)$$

Таким образом, деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов.

Малый угол γ , на который изменяется первоначально прямой угол, называется **УГЛОМ СДВИГА ИЛИ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ СДВИГОМ.**

9.3.2. Зависимость между напряжениями и деформациями. Для получения этой зависимости, известной как **закон Гука**, найдем относительное изменение длины диагонали AC (см. рис. 9.4).

Из чертежа легко видеть, что исходная длина этой диагонали $l_{AC} = a\sqrt{2}$, или

$$AC = \frac{a}{\sin 45^\circ}.$$

Абсолютное линейное удлинение диагонали AC , в соответствии с чертежом, равно C_1C_2 . В соответствии с принятыми для абсолютных линейных деформаций обозначениями $C_1C_2 = \Delta l$.

В силу малости деформаций по сравнению с начальными размерами элемента, треугольник CC_2C_1 можно считать равнобедренным, следовательно:

$$C_1C_2 = CC_1 \cos 45^\circ, \quad \text{и} \quad \Delta l = \Delta S \cos 45^\circ.$$

Тогда относительное линейное удлинение диагонали AC , с учетом того, что

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S \times \cos 45 \times \sin 45}{a} = \frac{\Delta S}{2a}.$$

В соответствии с (9.9) $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$, следовательно

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2}. \quad (9.10)$$

Рассматривая рис. 9.3 б и рис. 9.4 видим, что главное напряжение σ_1 действует в направлении диагонали AC . Поэтому относительное удлинение ε этой диагонали есть не что иное, как главное удлинение ε_1 при плоском напряженном состоянии.

Для вычисления относительной линейной деформации воспользуемся **обобщенным законом Гука**. В нашем случае

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Подставив значения напряжений по (9.1), имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1}{E} (\tau - \mu(-\tau)), \text{ или}$$

$$\varepsilon = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (9.11)$$

Приравняв полученные в (9.10) и (9.11) соотношения для относительной деформации, получим зависимость

$$\tau = \gamma \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (9.12)$$

Множитель в виде дроби есть постоянная величина, которая называется модуль упругости II рода (**модуль сдвига**) и обозначается G . Таким образом, заменив в (9.12)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (9.13)$$

получим **формулу закона Гука при чистом сдвиге**:

$$\tau = G\gamma. \quad (9.14)$$

9.4. Зависимость между тремя упругими постоянными G , E , μ .

Для изотропных материалов между модулем упругости G при сдвиге и модулем упругости E при растяжении выше (9.13) мы получили зависимость. Эта формула выражает **связь между тремя упругими постоянными** материала. Например, для малоуглеродистой стали, значение модуля сдвига будет

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \times 10^5}{2(1 + 0,25)} = 8 \times 10^4 \text{ МПа}.$$

9.5. Расчеты на прочность и жесткость при сдвиге

9.5.1. Определение напряжений. Как мы помним, с **видом нагружения или с деформацией сдвига** (иногда называют – **среза**) мы встречаемся, когда из 6 компонентов главного вектора внутренних сил R и главного вектора внутреннего момента M **отличны от нуля только поперечные силы Q_x или Q_y** .

С достаточной степенью приближения сдвиг практически может быть получен в случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон **на весьма близком расстоянии друг от друга** действуют две равные силы, перпендикулярные к оси бруса и направленные навстречу друг другу (рис. 9.5 а). При этом участок бруса между точками приложения силы сдвигается (рис. 9.5 б) – приняв сечение ab неподвижным, получим смещение сечения cd в положение c_1d_1 . Если расстояние между сечениями будет близким к нулю, эти сечения будут скользить друг по другу.

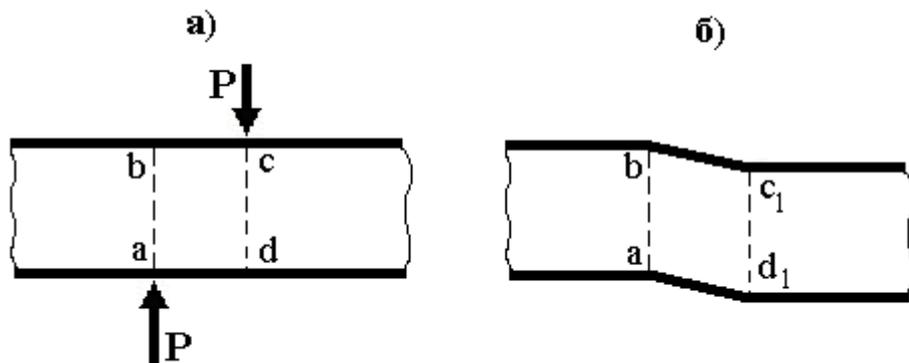


Рис. 9.5. Сдвиг участка бруса между точками приложения сил

Примером такого действия сил на брус может быть *резка ножницами прутьев, полосы* и т.д., при условии, что **сечения, в которых прикладываются силы, расположены очень близко друг к другу**. Если это условие не выполняется, то в сечениях появится изгибающий момент, определяемый силой, умноженной на плечо (расстояние между точками приложения сил).

На практике сдвиг «в чистом виде» получить трудно, т.к. обычно сдвиг сопровождается другими видами нагружения и, чаще всего, изгибом.

Если, например, **весьма короткий толстый брус** заделан одним концом в стену, а к другому приложить силу P (рис. 9.6 а), то этот брус будет испытывать одновременное действие изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_y – см. поперечный изгиб балки. Однако, для очень короткого бруса, влияние изгиба будет незначительно и поэтому им можно пренебречь. Таким образом, получим действие **только поперечной силы, т.е. сдвиг**.

Мысленно рассечем брус сечением $I-I$ и отбросим его левую часть (рис. 9.6 б). Очевидно, что действие отброшенной части на оставшуюся часть бруса будет выражаться через внутреннюю силу $Q = P$, приложенную в плоскости сечения. Эта сила, в свою очередь, может быть определена по одному из уравнений (2.5) – в данном случае, для $Q_y = \int \tau_y dF$.

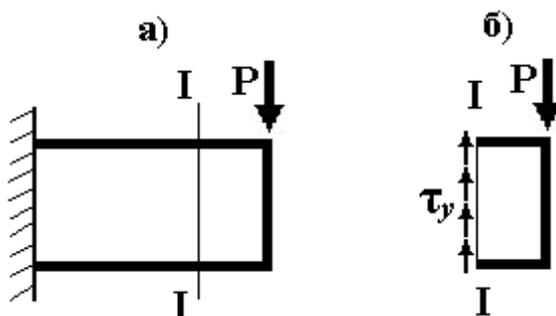


Рис. 9.6. Напряжения при поперечном изгибе короткого консольного бруса (касательные напряжения при сдвиге)

Таким образом, при сдвиге в произвольных сечениях действуют **только касательные напряжения**, равнодействующей которых и является **поперечная сила**.

Распределение этих напряжений по площади сечения не будет равномерным, но для упрощения решения практических задач *предполагается*, что **касательные напряжения при сдвиге распределяются по сечению равномерно**. Поэтому величину касательных напряжений при сдвиге можно определить по формуле

$$\tau = \frac{Q}{F}. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) дает не истинное, а **среднее значение** касательных напряжений.

Допущение о равномерном распределении касательных напряжений по сечению во многих случаях себя оправдывает и, поэтому, **в инженерной практике им широко пользуются при расчете болтов, заклепочных соединений, шпонок, сварных соединений и других деталей**.

Условие прочности при сдвиге запишем в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]. \quad (9.16)$$

9.5.2. Определение деформаций. В формуле закона Гука (9.14) заменим γ в соответствии с (9.9) и τ – в соответствии с (9.15) и получим формулу для определения абсолютного сдвига:

$$\Delta S = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Q a}{F G};$$

$$\Delta S = \frac{Q a}{G F}. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) есть также как и (9.14) закон Гука при сдвиге и используется для расчета деформаций.

Произведение $G F$ называется жесткостью поперечного сечения при сдвиге.

По максимальному значению абсолютного сдвига можно проводить **проверку жесткости**:

$$\Delta S_{\max} = \frac{Q_{\max} a}{G F} \leq [\Delta S], \quad (9.18)$$

где $[\Delta S]$ – допускаемое значение абсолютного сдвига [мм, см].

9.5.3. Потенциальная энергия при сдвиге. Потенциальная энергия деформации рассматриваемого элемента будет равна работе силы Q , действующей по грани ВС при чистом сдвиге:

$$U = \frac{\Delta S \cdot Q}{2} = \frac{Q^2 \cdot a}{2GF}. \quad (9.19)$$

Удельная потенциальная энергия:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q^2}{2F^2 G} = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Эта же зависимость может быть получена также, если в выражение (9.7) подставить значение модуля сдвига из (9.13). Напомним это выражение:

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (9.20)$$

9.5.4. Практические расчеты некоторых простейших соединений, работающих на сдвиг. В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют **значительные по величине касательные напряжения**. В этих же сечениях действуют, как правило, и нормальные напряжения, однако, их величина несравнимо меньше.

В приближенных расчетах учитываются **лишь касательные напряжения**, а указанные сечения, при этом, рассматриваются как **площадки чистого сдвига**. Такие расчеты называются расчетами на сдвиг (или на срез, на смятие, на скалывание).

9.5.4.1. Заклепочные соединения. Выясним, как работает заклепка в соединении (рис. 9.7 а).

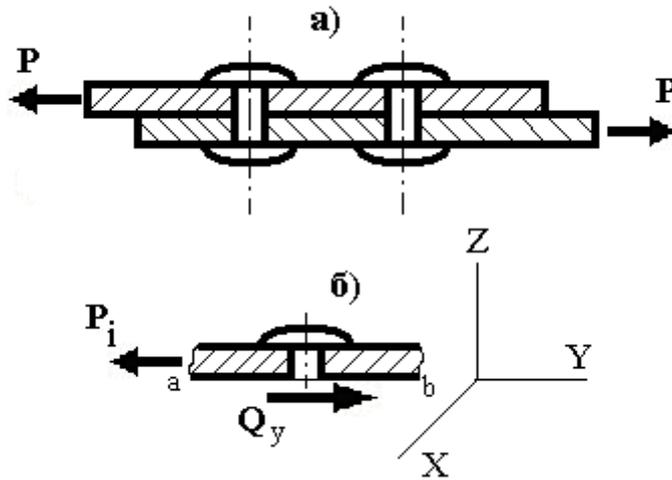


Рис. 9.7. К расчету заклепочного соединения

На каждую заклепку передаются от соединяемых листов по две равные и противоположно направленные силы.

Действие отброшенной нижней части заклепочного соединения передается в сечении ab за счет возникающей в нем поперечной силы Q_y (рис. 9.7 б). Усилие, приходящееся на одну заклепку P_i точно определить затруднительно.

Опыты показывают, что заклепки в ряду, параллельном линии действия силы, работают неодинаково: одни из них испытывают большее усилие, чем другие, но к моменту разрушения усилия, передающиеся на все заклепки, практически выравниваются за счет пластических деформаций, и, поэтому, считают, что все заклепки напряжены равномерно.

Следовательно, при n заклепках в соединении, на каждую из них будут приходиться равные и противоположные силы $P_i = \frac{P}{n}$, которые стремятся перерезать заклепку по плоскости ab (см. рис. 9.7 б). В данном случае плоскостей среза две. Если одна заклепка, то соединение односрезное.

Из условия равновесия верхней части соединения, определим величину касательных напряжений, действующих по плоскости среза

$$\tau = \frac{Q_y}{F} = \frac{P_i}{F} = \frac{P_i}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (9.21)$$

где d – диаметр заклепки;

n – число заклепок в соединении.

Таким образом, **условие прочности** заклепочного соединения на срез:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau] \quad (9.22)$$

Условие прочности (9.22) позволяет, например, определить требуемое количество односрезных заклепок при заданном их диаметре и, наоборот, необходимый диаметр заклепки при заданном их количестве (9.23):

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]}; \quad d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi n [\tau]}}. \quad (9.23)$$

Расчет на прочность «многосрезных» заклепок производится по условию прочности

$$\tau = \frac{P}{m n \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau, \quad (9.24)$$

где m – число плоскостей среза.

9.5.4.2. Сварные соединения. В настоящее время соединение элементов конструкций производится различными методами сварки. Поэтому типы и виды сварных швов достаточно многообразны. Но наиболее распространены методы сварки плавлением, в частности электродуговой.

Рассмотрим три основных вида сварных соединений.

а) соединение встык производят путем заполнения зазора между торцами свариваемых элементов наплавленным металлом.

В зависимости от толщины δ свариваемых элементов (рис.9.8) швы выполняются без зазора или с зазором между свариваемыми листами; без разделки (рис.9.8 а) или с различного вида разделкой кромок, например, U – образной (рис.9.8 б) или X – образной (рис.9.8 в).

Прочность сварного соединения для любого вида стыковых швов проверяется по условию прочности на растяжение или сжатие по формуле:

$$\sigma_{ш} = \frac{P}{l_{ш} \times \delta} \leq [\sigma]_{ш}, \quad (9.25)$$

где $l_{ш} \delta = F_{ш}$ – условная рабочая площадь сечения шва, здесь $l_{ш} = b$ – расчетная длина сварного шва,

δ – толщина свариваемых элементов или высота шва (**катет шва**),

$[\sigma]_{ш}$ – допускаемое напряжение для материала сварного соединения.

б) соединение внахлестку. Детали соединяют лобовыми швами или встык при помощи накладок (рис. 9.9).

При этом способе создания сварных соединений швы получаются в виде валиков – так называемые **угловые и тавровые швы**.

Опытами установлено, что такие швы в большинстве случаев разрушаются по самому слабому сечению ab . Полное напряжение в этом случае можно разложить на нормальное $\sigma_{ш}$ и касательное $\tau_{ш}$. Т.к. **сопротивление стали сдвигу меньше**, чем

растяжению, расчет лобовых швов производят на срез при условии, что касательные напряжения распределяются равномерно по площади сечения ab .

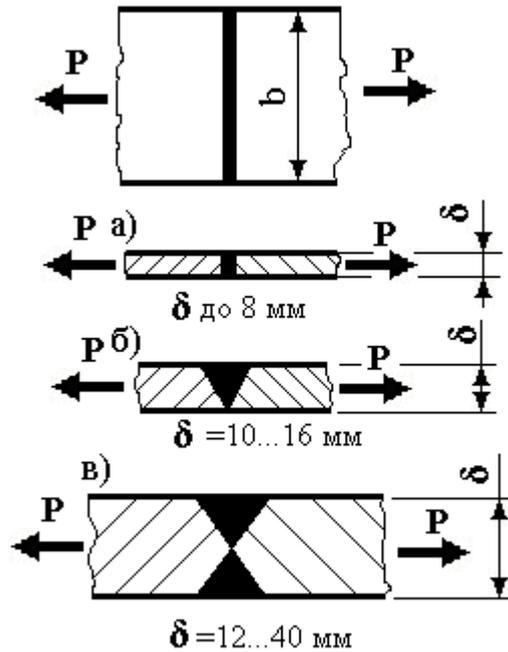


Рис. 9.8. Виды стыковых швов

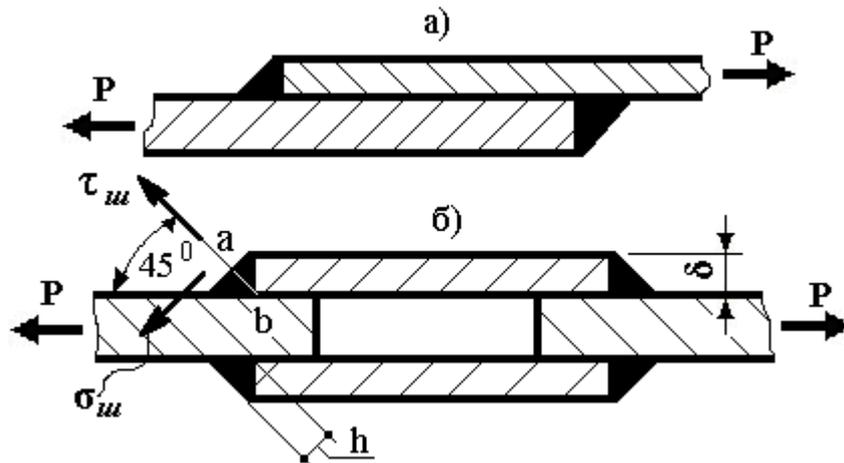


Рис. 9.9. Сварные соединения внахлестку

Касательное напряжение в опасном сечении (ab), учитывая восприятие силы P нижним швом, будет

$$\tau_w = \frac{P}{2F_w}, \quad (9.26)$$

где $F_w = h \cdot l = \delta \cdot \cos 45^\circ \cdot l = 0,7\delta \cdot l$; $l = b$.

Тогда условие прочности для сварного соединения внахлестку, с учетом, что таких шва два:

$$\tau_{ш} = \frac{P}{2 \times 0,7\delta \cdot l} \leq [\tau]_{ш} \quad (9.27)$$

В) соединение фланговыми (фланковыми) швами отличается от предыдущего тем, что швы расположены параллельно линии действия сил (рис. 9.10).

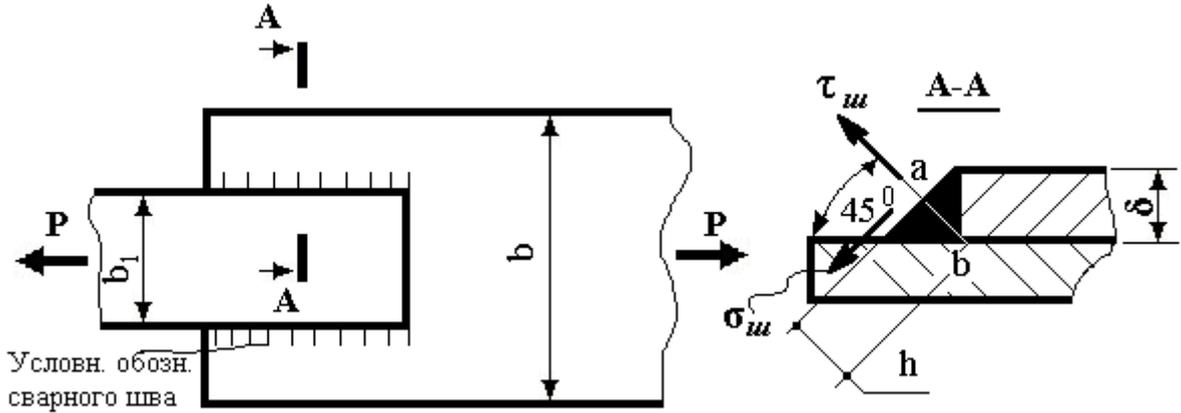


Рис. 9.10. Сварные соединения фланговыми швами

Такие швы разрушаются на большом их протяжении из-за среза наплавленного металла параллельно шву по плоскости ab .

Условие прочности сварного шва такого вида соединений имеет вид, аналогичный (9.27):

$$\tau_{ш} = \frac{P}{2 \cdot 0,7\delta \cdot l} \leq [\tau]_{ш}. \quad (9.28)$$

9.6. Кручение прямого бруса круглого поперечного сечения

Кручением называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$. (иногда обозначают T). С деформациями кручения приходится встречаться при расчете валов, винтовых пружин и других элементов конструкций.

9.6.1. Напряжения в поперечном сечении. Рассмотрим прямой брус круглого сечения, левый конец которого жестко заделан, а к правому концу приложен внешний скручивающий момент (рис. 9.11).

Проведем непосредственный эксперимент, в пределах пропорциональности напряжений и деформаций (в пределах действия закона Гука), для чего (рис. 9.11 а):

- нанесем на поверхность бруса прямоугольную сетку из линий, параллельных оси и линий, перпендикулярных оси (окружностей) Такая сетка линий позволяет получить наглядное представление о характере деформаций, вызванных внешним – скручивающим моментом;

- на свободном торце бруса проведем концентрические окружности и радиусы;

- нагрузим свободный торец бруса скручивающим моментом m .

Результаты эксперимента следующие (рис. 9.11 б):

1. Прямоугольная сетка, выполненная на поверхности бруса, превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии **касательных напряжений в поперечных сечениях** бруса, а по закону парности равных им по величине касательных напряжений и **в продольных сечениях** бруса.

Круговые сечения бруса при кручении поворачиваются вокруг своей оси как жесткое целое.

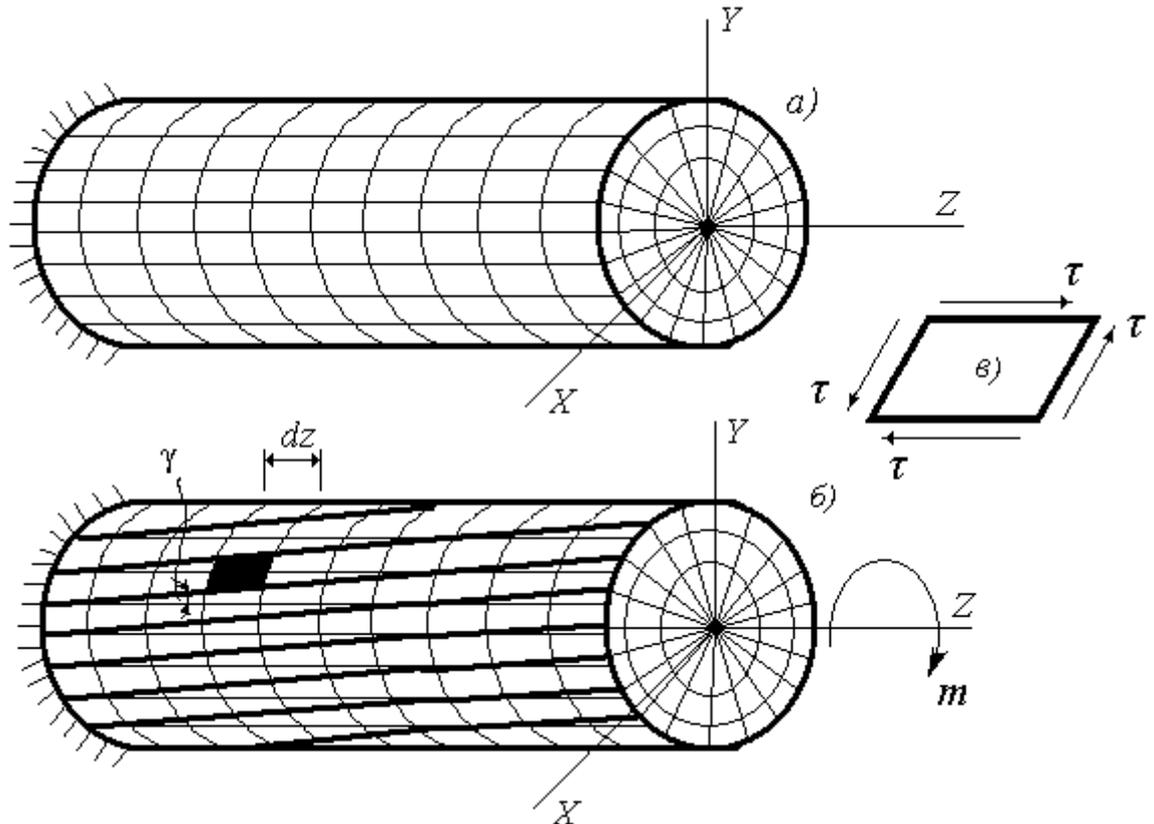


Рис. 9.11. Деформация круглого бруса под действием скручивающего момента

2. Расстояние между любыми двумя соседними поперечными сечениями остается **без изменения**. Поэтому не изменится и **длина стержня**.

Расстояния между поперечными круговыми сечениями остаются постоянными.

Это свидетельствует **об отсутствии нормальных напряжений в поперечных и продольных сечениях**.

3. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Следовательно, не изменится **диаметр бруса**.

4. Поперечные сечения бруса плоские и нормальные к его оси до деформации остаются плоскими и нормальными к ней после деформации (*гипотеза плоских сечений*), они лишь поворачиваются вокруг этой оси.

Таким образом, при кручении в поперечных и продольных сечениях бруса действуют **только касательные напряжения**, т.е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой **чистый сдвиг** (рис. 9.11 в).

Формулы, выведенные на основе этих положений, совпадают с формулами, полученными точными методами теории упругости и подтверждаются экспериментально.

Для установления закона распределения касательных напряжений по поперечному сечению скручиваемого бруса рассмотрим более детально его деформации.

Двумя поперечными сечениями выделим из бруса (рис. 9.11 а) цилиндр элементарной длины dz (рис. 9.12). Радиус этого цилиндра ρ . Правое сечение цилиндра $m-m$

мысленно закрепим, а левое сечение $n-n$ повернем на элементарно малый угол $d\varphi$, приложив к нему скручивающий момент m .

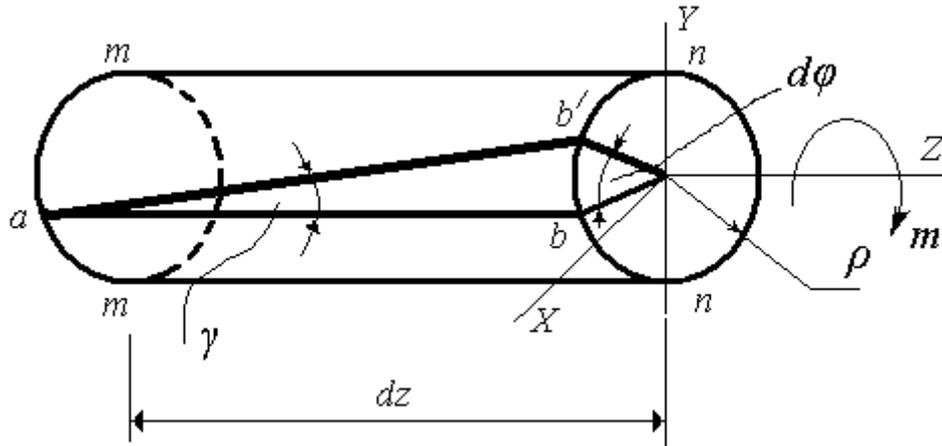


Рис. 9.12. Закручивание участка бруса длиной dz и радиусом ρ

Угол φ называется абсолютным углом закручивания одного сечения относительно другого. Имеет размерность рад.

Образующая цилиндра ab при этом повернется и займет положение ab' , образовав угол γ .

Угол γ называется относительным сдвигом (углом сдвига). Является безразмерной величиной.

Этот угол определим по формуле:

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = \frac{bb'}{ab}. \quad (9.29)$$

С учетом того, что $ab = dz$, а $bb' = \rho d\varphi$ формулу (8.29) можно записать в виде:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (9.30)$$

Отношение $\frac{d\varphi}{dz}$ обозначается θ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (9.31)$$

Угол θ называется относительным углом закручивания. Имеет размерность рад/м.

Введя обозначение θ в формулу (9.30), получаем зависимость

$$\gamma = \theta \rho. \quad (9.32)$$

В соответствии с законом Гука при сдвиге ($\tau = G\gamma$) выражение для касательного напряжения τ в любой точке поперечного сечения круглого бруса на расстоянии ρ от центра примет вид:

$$\tau = G\theta \rho. \quad (9.33)$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений в продольных плоскостях также должны возникнуть касательные напряжения (в плоскостях, параллельных оси бруса). Поясним на примере.

Рассмотрим поперечное сечение круглого бруса радиусом r в цилиндрической системе координат (рис. 9.13 а), вырезав на радиусе ρ элемент длиной dz с толщиной $d\rho$ (рис. 9.13 б).

После нагружения скручивающим моментом m элемент деформируется, причем

$$\gamma_{x\varphi} \neq 0; \quad \gamma_{x\rho} = \gamma_{\rho\varphi} = 0; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_\rho = \varepsilon_\varphi = 0.$$

В выделенном элементарном слое $d\rho$ возникнут касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} \neq 0, \quad \tau_{x\varphi} = \tau_{\rho\varphi} = 0; \quad \sigma_z = \sigma_\rho = \sigma_\varphi = 0.$$

Рассмотрим поперечное сечение бруса диаметром D (рис. 9.14 а).

Элементарные силы τdF приводятся к крутящему моменту $M_{кр}$. (рис. 9.14 б):

$$M_{кр.} = \int_F \tau \rho dF. \quad (9.34)$$

Подставляя в функцию под интегралом формулу для касательных напряжений (9.33) и получим выражение для крутящего момента в поперечном сечении:

$$M_{кр.} = G\theta \int_F \rho^2 dF.$$

Под интегралом – геометрическая характеристика сечения (полярный момент инерции) $J_\rho = \int_F \rho^2 dF$. Получаем выражение $M_{кр.} = G\theta J_\rho$.

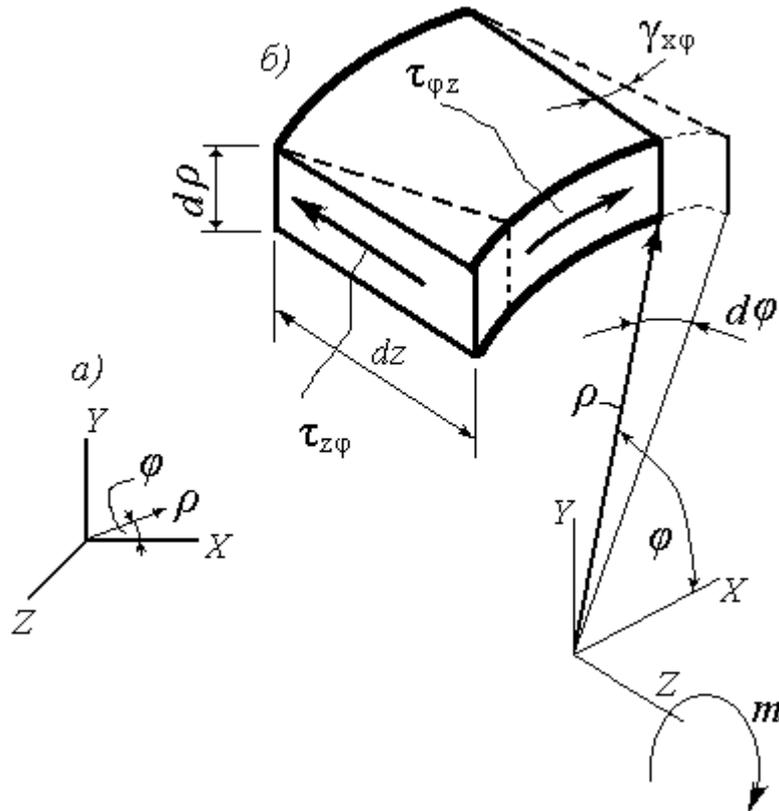


Рис. 9.13. Деформации и напряжения в элементарном слое сечения бруса

Таким образом, **относительный угол закручивания:**

$$\theta = \frac{M_{кр.}}{GJ_{\rho}} \quad (9.35)$$

где GJ_{ρ} – жесткость бруса при кручении.

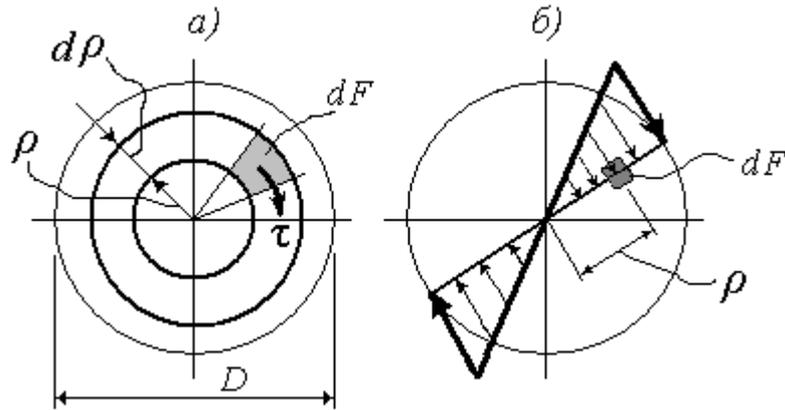


Рис. 9.14. Касательные напряжения (а) и эпюра их распределения (б)

Через относительный угол закручивания $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ определяется величина взаимного угла поворота сечений – **абсолютный угол закручивания** φ :

$$d\varphi = \theta dz = \frac{M_{кр.} dz}{GJ_{\rho}}, \text{ откуда получаем зависимость}$$

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр.} dz}{GJ_{\rho}}. \quad (9.36)$$

Для вала постоянного поперечного сечения при постоянном по длине l крутящем моменте его абсолютный угол закручивания определяется формулой:

$$\varphi = \frac{M_{кр.} l}{GJ_{\rho}}. \quad (9.37)$$

Эта формула – формула, описывающая **ЗАКОН ГУКА ПРИ КРУЧЕНИИ**.

Отношение $\frac{GJ_{\rho}}{l}$ называют **КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ** бруса.

Если в формулу (9.33) вместо θ подставить выражение (9.35), то получим формулу для определения касательных напряжений при кручении

$$\tau = G\theta\rho = G \frac{M_{кр.} \rho}{GJ_{\rho}} \text{ или, окончательно}$$

$$\tau = \frac{M_{кр.} \rho}{J_{\rho}} \quad (9.38)$$

9.6.2. Эпюра касательных напряжений. Используя полученную формулу, строят эпюру напряжений (см. рис. 9.14 б).

Касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении распределяются вдоль радиуса по линейному закону и имеют наибольшие значения в точках, наиболее удаленных от оси бруса.

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр.} \rho_{\max}}{J_{\rho}}, \quad (9.39)$$

где отношение $\frac{J_{\rho}}{\rho_{\max}} = W_p$ и называется **полярным моментом сопротивления**

сечения.

Таким образом, окончательно получаем формулу для определения максимальных касательных напряжений круглого бруса постоянного сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр. \max}}{W_p}. \quad (9.40)$$

9.6.3. Условие прочности. Исходя из формулы для определения максимального касательного напряжения при кручении (9.40), записывается условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр.}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (9.41)$$

Замечания. Для бруса постоянного сечения берется максимальное значение крутящего момента ($M_{кр. \max}$).

Если брус ступенчатый (имеет участки разного диаметра), то определяется опасное сечение – то сечение, где отношение крутящего момента к полярному моменту сопротивления имеет наибольшее значение (по модулю). В этом случае удобно определять это сечение **по эпюре распределения касательных напряжений по длине бруса**.

Как было показано выше (см. формулы 9.5 и 9.6), допускаемое касательное напряжение равно $\approx (0,5 - 0,6)$ от значения допускаемого нормального напряжения.

Из условия прочности при кручении, решаются три типа задач:

1. Проверка прочности (проверочный расчет).

В этом случае из эпюры известно опасное сечение (значение $M_{кр. \max}$ или τ_{\max}) и заданы размеры сечения (диаметр) вала.

Определяются максимальные напряжения (по формуле 9.41), которые сравниваются с допускаемыми. При этом, величина максимальных касательных напряжений может быть больше, чем допускаемые, но не должна превышать 5%;

2. Подбор сечения (проектировочный расчет).

По известному значению $M_{кр. \max}$ (из эпюры) и заданному значению $[\tau]$ определяют требуемое значение диаметра вала.

Неравенство (9.41) решается относительно полярного момента сопротивления

$$W_p \geq \frac{M_{кр. \max}}{[\tau]}. \quad (9.42)$$

Диаметр вала сплошного сечения d определяется, исходя из:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ откуда, с учетом (9.42), } d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр.маx}}{\pi[\tau]}}.$$

Для вала, имеющего сечение кольца (внешний диаметр D , а внутренний $-d$):

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4), \text{ где } \alpha = \frac{D}{d}.$$

3. Определение максимальной грузоподъемности (допускаемого значения скручивающего момента $[m]$).

Эпюра крутящих моментов строится в долях скручивающего момента, определяются опасное сечение и полярный момент сопротивления.

Неравенство (9.41) решается относительно максимального крутящего момента

$$M_{кр.маx} \leq [\tau] W_p. \quad (9.43)$$

С учетом значения его в опасном сечении определяется допускаемое значение внешнего момента $[m]$.

Важно отметить, что исходя из соотношений

$$m = \frac{N}{\omega} \text{ и } \omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (9.44)$$

где N – мощность, передаваемая валом, $кВт$,

ω – частота вращения вала, $рад/сек$,

n – число оборотов вала, $об/мин$

после простых преобразований неравенства (9.43) можно определить допускаемую мощность на валу, частоту вращения его или число оборотов.

9.6.4. Жесткость поперечного сечения при кручении. Часто к валу предъявляют требование, чтобы он обладал достаточной жесткостью. Иначе говоря, необходима проверка жесткости бруса.

Соблюдение условия прочности при проектировании валов является необходимым, но не всегда достаточным.

Для выполнения этих расчетов рассматриваются перемещения сечений вала. В подразделе 9.6.1 были даны понятия углов закручивания – относительного (формула 9.35), абсолютного (формула 9.36), а также жесткости вала.

Эпюру перемещений чаще всего строят для абсолютного угла закручивания – угла, на который одно сечение поворачивается относительно другого.

9.6.5. Условие жесткости. Условие жесткости выражает условие о том, что максимальный относительный угол закручивания не должен превосходить его наперед заданной (допускаемой) величины:

$$\theta_{маx} = \frac{M_{кр.}}{GJ_p} \leq [\theta]. \quad (9.45)$$

Здесь также необходимо учитывать замечания, изложенные в подразделе 9.6.3.

Допускаемое значение относительного угла закручивания определяется требованиями к жесткости и особенностями эксплуатации вала:

- для валов, работающих в обычных условиях $[\theta] = 0,3 \text{ град/м}$;
- для валов, работающих при ударных нагрузках $[\theta] = 0,15 \text{ град/м}$;
- для валов, работающих при повторно-переменных нагрузках $[\theta] = 0,25 \text{ град/м}$;

– для карданных валов двигателей $[\theta] = \text{до } 2,5 \text{ град/м}$.
Заметим, что $0,1 \text{ град/м} \approx 1,75 \times 10^{-3} \text{ рад/м}$.

Из условия жесткости при кручении, решаются три типа задач:

1. Проверка жесткости (проверочный расчет).

Из эпюры определяют опасное сечение и $M_{кр. max}$, по заданному диаметру – полярный момент инерции J_p .

В соответствии с неравенством (9.45) проверяют жесткость вала.

2. Подбор сечения вала (проектировочный расчет).

Неравенство (9.45) решается относительно J_p :

$$J_p \geq \frac{M_{кр. max}}{G[\theta]}. \quad (9.46)$$

Для опасного сечения определяют $M_{кр. max}$, а затем, с учетом зависимости

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \text{ определяют диаметр } d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр. max}}{\pi G[\theta]}}.$$

3. Определение максимальной грузоподъемности (допускаемого значения скручивающего момента $[m]$).

Эпюра крутящих моментов строится в долях скручивающего момента, определяют опасное сечение и полярный момент инерции.

Неравенство (9.45) решается относительно максимального крутящего момента

$$M_{кр. max} = G J_p [\theta]. \quad (9.47)$$

Здесь также справедливы комментарии в отношении определения N , ω и n , которые определяются по зависимостям (9.44).

Результаты расчетов, проводимых по условиям прочности и жесткости, НЕ СОВПАДАЮТ.

Пример 1.

Вал скручивается моментом $m = 3 \text{ кНм}$. Допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 45 \text{ МПа}$. Допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,005 \text{ рад/м}$. Модуль упругости материала вала $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Определить диаметр вала d .

Из условия прочности, находим

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр.}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 3 \times 10^3}{3,14 \times 45 \times 10^6}} = 0,07 \text{ м} = 7 \text{ см}.$$

Из условия жесткости, находим

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр.}}{G \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 3 \times 10^3}{8 \times 10^4 \times 10^6 \times 3,14 \times 0,005}} = 9,35 \times 10^{-2} \text{ м} = 9,35 \text{ см}.$$

Из двух полученных диаметров, в соответствии с неравенствами (9.41 и 9.45) выбираем большее по величине значение.

Округляя, принимаем $d = 9,4 \text{ см}$.

Пример 2.

Дано. На стальной вал насажены четыре шкива (рис. 9.15 а). Частота вращения вала $\omega = 20 \text{ рад/сек}$. Шкив 2 передает мощность $N_2 = 75 \text{ кВт}$. Шкивы 1, 3, 4 соответственно передают рабочим органам мощности $N_1 = 20 \text{ кВт}$, $N_3 = 30 \text{ кВт}$, $N_4 = 25 \text{ кВт}$. Направления передачи мощности на шкивах (по стрелке А): №2 – **против хода** часовой стрелки, №№1,3,4 – **по ходу** часовой стрелки.

Модуль упругости II рода материала вала $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$, допускаемые значения: касательных напряжений $[\tau] = 40 \text{ МПа}$, допускаемого относительного угла закручивания $[\theta] = 9 \times 10^{-3} \text{ рад/м}$.

Требуется. Определить из расчетов на прочность и жесткость требуемое значение:

- диаметр d сплошного вала (рис. 9.15 з);
- наружный диаметр d_n (рис. 9.15 д) полого вала при отношении наружного и внутреннего диаметров $\alpha = \frac{d_{вн.}}{d_n} = 0,7$.

Решение. Исходя из формулировки условия задачи, требуется выполнить проекторочные расчеты.

1. Построение эпюры крутящих моментов.

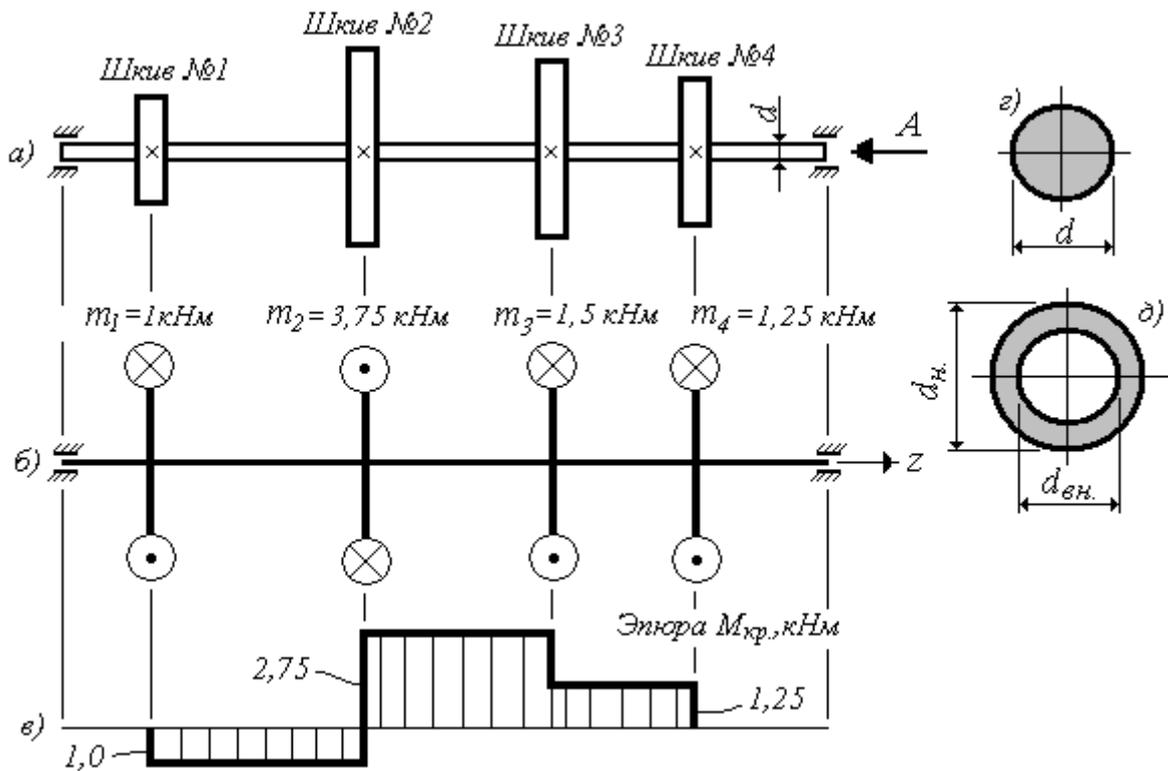


Рис. 9.21. К решению примера 2

Определим величины крутящих моментов по формуле $m_i = \frac{N_i}{\omega}$,

где i – номер шкива.

$$m_1 = \frac{20}{20} = 1 \text{ кНм}; \quad m_2 = \frac{75}{20} = 3,75 \text{ кНм}; \quad m_3 = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ кНм}; \quad m_4 = \frac{25}{20} = 1,25 \text{ кНм}.$$

Для схемы вала с приложенными соответствующими скручивающими моментами m_i (рис. 4.15 б) определим крутящие моменты $M_{кр}$ в сечениях, где приложены моменты m , и строим эпюру крутящих моментов (рис. 4.15 в).

2. Определение диаметра сплошного d и полого d_n валов из условия прочности при кручении.

2.1. Определяем требуемое значение диаметра сплошного круглого сечения в соответствии с формулой:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр. \max}}{\pi[\tau]}}$$

Максимальное значение крутящего момента определили из эпюры. Тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2,75 \times 10^3}{3,14 \times 40 \times 10^6}} = 7,05 \times 10^{-2} \text{ м} = 7,05 \text{ см}.$$

Округляем значение диаметра до ближайшего большего в соответствии с таблицей ГОСТ. Принимаем $d = 7,1 \text{ см}$.

2.2. Определяем требуемое значение наружного диаметра полого вала. В этом случае полярный момент сопротивления определяется по формуле

$$W_P = \frac{\pi d_n^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Откуда

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр. \max}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2,75 \times 10^3}{3,14 \times 40 \times 10^6 (1 - 0,7^4)}} = 7,71 \times 10^{-2} \text{ м} = 7,71 \text{ см}.$$

Округляем значение диаметра до ближайшего большего в соответствии с таблицей ГОСТ. Принимаем $d_n = 7,8 \text{ см}$. Значение $d_{вн.} = \alpha d_n = 0,7 \times 7,8 = 5,5 \text{ см}$.

Сравним площади сечений сплошного и полого валов, что характеризует расход стали (вес пропорционален площади):

$$\frac{F_{спл.}}{F_{полого}} = \frac{\pi d^2}{4\pi(d_n^2 - d_{вн.}^2)} = \frac{7,1^2}{7,8^2 - 5,5^2} = 1,65.$$

Таким образом, вес (металлоемкость) сплошного вала на 65% больше, чем вес полого вала.

3. *Определение диаметра сплошного d и полого d_n валов из условия жесткости при кручении.*

3.1. Определяем требуемое значение диаметра сплошного круглого сечения в соответствии с формулой:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр. \max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 2,75 \times 10^3}{3,14 \times 8 \times 10^4 \times 10^6 \times 9 \times 10^{-3}}} = 7,9 \times 10^{-2} \text{ м} = 7,9 \text{ см}.$$

Округляем до $d = 8,0 \text{ см}$.

3.2. Определяем требуемое значение наружного диаметра полого вала. В этом случае полярный момент инерции определяется по формуле

$$J_P = \frac{\pi d_n^4}{32} (1 - \alpha^4).$$

Откуда

$$d_n = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр. \max}}{\pi G[\theta](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 2,75 \times 10^3}{3,14 \times 8 \times 10^4 \times 10^6 \times 9 \times 10^{-3} (1 - 0,7^4)}} = 8,43 \times 10^{-2} \text{ м} = 8,43 \text{ см}.$$

Округляя, принимаем $d_n = 8,5 \text{ см}$. Значение $d_{вн.} = \alpha d_n = 0,7 \times 8,5 = 5,95 \text{ см}$, округляем до 6 см .

Отношение площадей сечений:

$$\frac{F_{спл.}}{F_{полого}} = \frac{8^2}{8,5^2 - 6^2} = 1,76.$$

При расчете по условию жесткости вес (металлоемкость) сплошного вала на 76% больше, чем вес полого вала.

Необходимо обеспечить как прочность, так и жесткость вала. Поэтому, сравнивая значения диаметров, полученные при расчете, **окончательно принимаем большие значения диаметров:**

$$d = 8,0 \text{ см}; \quad d_n = 8,5 \text{ см}; \quad d_{вн.} = 5,95 \text{ см}.$$

9.6.6. Потенциальная энергия упругой деформации. Изобразим зависимость между крутящим моментом и углом закручивания бруса при статическом нагружении (рис. 9.16). В пределах действия закона Гука эта зависимость изображается прямой линией OA .

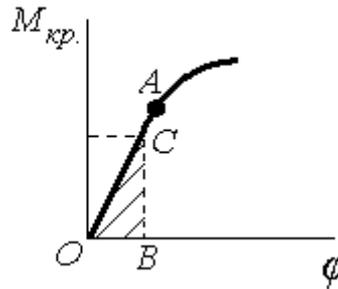


Рис. 9.16. Типичная диаграмма при испытаниях круглого бруса на кручение

Диаграмма не имеет явно выраженной площадки текучести. Поэтому определяют условный предел текучести при кручении как значение касательного напряжения при величине остаточной угловой деформации, равной 0,3% (0,003 рад.) и обозначается $\tau_{0,3}$.

Работа внешних сил (работа скручивающих моментов) до предела упругости (пропорциональности) выражается площадью под диаграммой, т.е. площадью треугольника $\triangle BOC$:

$$A_{упр.} = \frac{M_{кр.} \varphi}{2}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии потенциальная энергия, накопленная при упругой деформации, численно равна работе внешних сил или внутренних сил $U = A_{упр.}$. С учетом (9.37) получим:

$$U = \frac{M_{кр.}^2 l}{2GJ_p}. \quad (9.48)$$

9.7. Статически неопределимые задачи при кручении.

При кручении так же, как и при других видах нагружения, встречаются задачи, когда уравнений равновесия недостаточно для определения действующих внутренних силовых факторов – в данном случае крутящих моментов.

Такие задачи, как известно, называются статически неопределимыми задачами.

Методика раскрытия статической неопределимости рассмотрена нами ранее. Решение статически неопределимой задачи при кручении покажем на примере.

Брус круглого поперечного сечения (рис. 9.17 а) жестко закреплен обоими концами и нагружен моментом m на расстоянии a от левой опоры.

Составим уравнение равновесия статики (можем составить только одно):

$$\sum m_z = 0; \quad m_A + m_B - m = 0, \quad (9.49)$$

где m_A и m_B – опорные моменты.

Составляем уравнение совместности деформаций на основе сравнения деформаций (абсолютного угла закручивания) например, на опоре A . Отбросим эту опору (рис. 9.17 б).

По условию закрепления угол поворота этого сечения должен быть равен нулю:

$$\varphi_A = 0.$$

Но этот угол, согласно принципу суперпозиции, можно представить как сумму абсолютных углов закручивания от действия моментов m и m_A :

$$\varphi_A = \varphi_m + \varphi_{m_A} = 0. \quad (9.50)$$

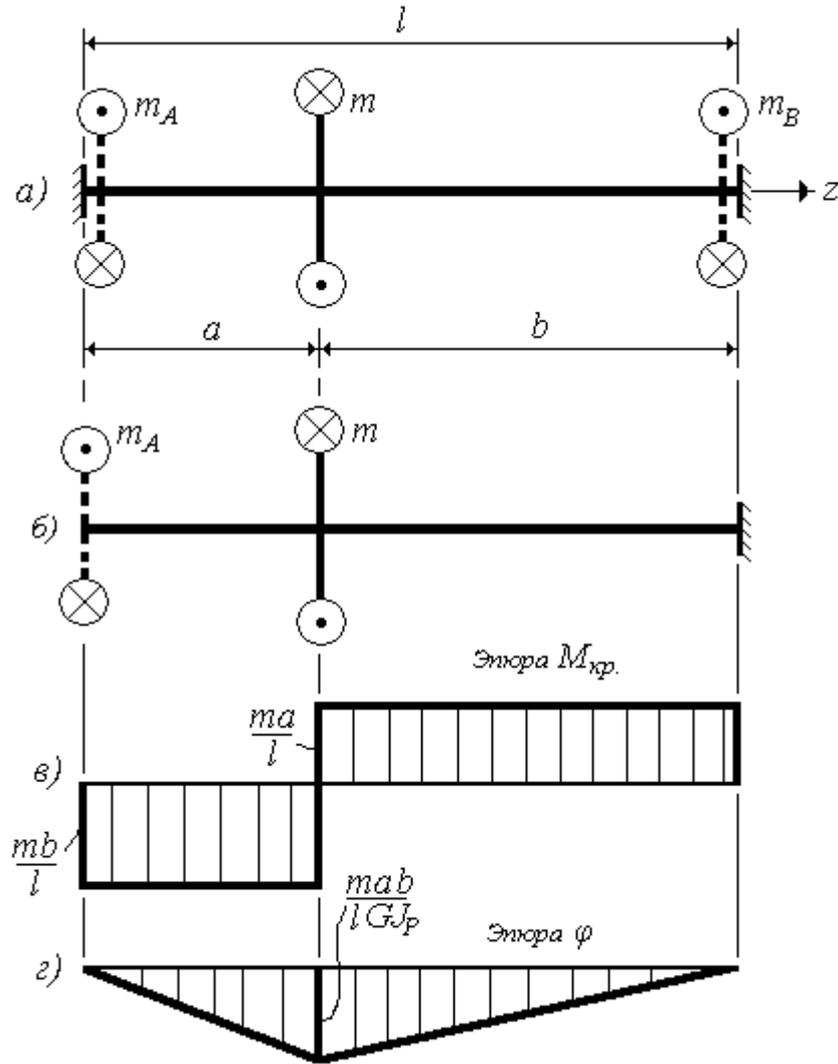


Рис. 9.17. К расчету статически неопределимого бруса

В соответствии с (9.37):

$$\varphi_m = -\frac{mb}{GJ_P}; \quad \varphi_{m_A} = \frac{m_A l}{GJ_P} = 0.$$

А с учетом уравнения (8.50):

$$\varphi_A = -\frac{mb}{GJ_P} + \frac{m_A l}{GJ_P} = 0 \text{ и, следовательно, } m_A = \frac{mb}{l}.$$

Подставляя полученное значение опорного момента в уравнение (9.49) имеем:

$$\frac{mb}{l} + m_B - m = 0, \text{ откуда } m_B = m \frac{(l-b)}{l} = m \frac{a}{l}.$$

Определив опорные моменты, строим эпюры крутящих моментов (рис. 9.16 в).

Угол поворота в сечении C , где приложен внешний момент m , определяется абсолютным углом закручивания сечения C по отношению к сечению A :

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_{AC} = 0 + \frac{m_A a}{GJ_P} = \frac{m \frac{ba}{l}}{GJ_P}.$$

Строим эпюру углов поворота – абсолютных углов закручивания (рис. 9.17 з).

9.8. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением.

Задача определения напряженного состояния, и соответственно, расчета бруса **некруглого** поперечного сечения является значительно более сложной по сравнению с рассмотренной выше задачей. Причина в том, что некоторые допущения, принятые для круглого бруса, при кручении бруса некруглого поперечного сечения не выполняются. В частности, нарушается гипотеза плоских сечений, которая позволяла упростить расчеты. Поэтому формулы сопротивления материалов, полученные выше (см. разделы 9.6 и 9.7) для рассматриваемого случая неприменимы.

Рассмотрим брус прямоугольного поперечного сечения, который закручивается внешними моментами m (рис. 9.18).

Если на поверхность этого бруса предварительно нанести сетку, то после нагружения поперечные линии сетки заметно искривляются (следовательно, и поперечные сечения будут искривляться). Отдельные точки сечения перемещаются вдоль оси стержня, и сечение в целом перестает быть плоским.

Наблюдается так называемая ДЕПЛАНАЦИЯ сечения.

Задача усложняется еще и потому, что в отличие от круглого сечения осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения не равны по величине.

Решение поставленной задачи возможно только с использованием методов теории упругости по формулам, приведенным ниже, или на ЭВМ с использованием МКЭ.

Приведем формулы, полученные в теории упругости при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения.

На рис. 9.19 изображена эпюра распределения касательных напряжений для рассматриваемого сечения.

Значения касательных напряжений:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_{кр.}}{W_K}; \quad \tau_B = \gamma \tau_A. \quad (9.51)$$

Абсолютный угол закручивания бруса длиной l :

$$\varphi = \frac{M_{кр.} l}{GJ_K}. \quad (9.52)$$

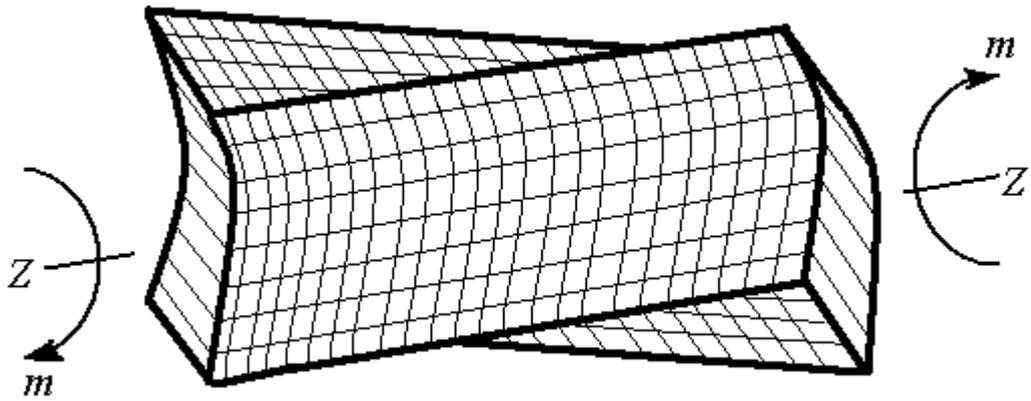


Рис. 9.18. Депланация бруса прямоугольного сечения при кручении

В приведенных выше формулах:

b – меньшая по величине сторона прямоугольника,

$J_K = \alpha b^4$; $W_K = \beta b^3$ – соответственно момент сопротивления и осевой момент инерции сечения при кручении,

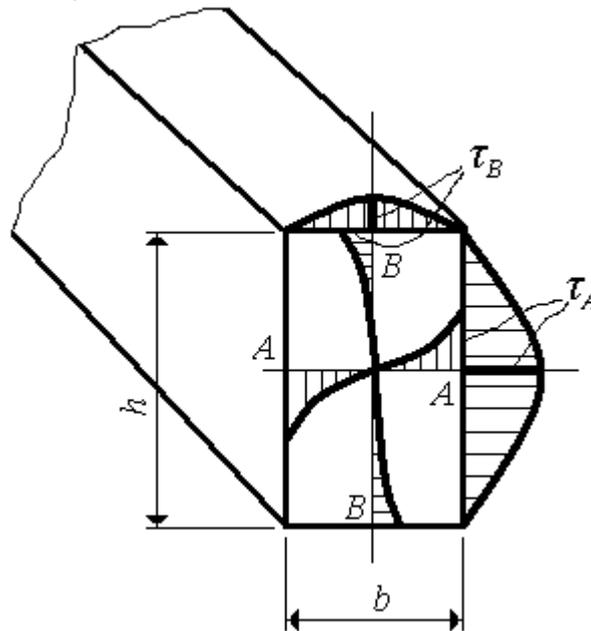


Рис. 9.19. Распределение касательных напряжений по прямоугольному сечению бруса

α , β , γ – коэффициенты, зависящие от соотношения размеров сторон прямоугольника. Приводятся в соответствующих таблицах.

Проанализируем особенности распределения касательных напряжений (рис. 9.20).

1). В поперечном сечении скручиваемого бруса **касательное напряжение в каждой точке A , расположенной в непосредственной близости от боковой поверхности бруса, всегда направлено параллельно касательной к контуру сечения** (рис. 9.20 a). Поясним этот вывод.

По закону парности касательных напряжений $\tau_n = \tau_{n_1}$, но боковая (внешняя) поверхность бруса не нагружена), поэтому $\tau_n = \tau_{n_1} = 0$, а τ совпадает по направле-

нию с τ_t , т.е. направлено по касательной к контуру сечения. Иначе говоря, в общем случае касательное напряжение направлено вдоль контура сечения (рис. 9.20 б).

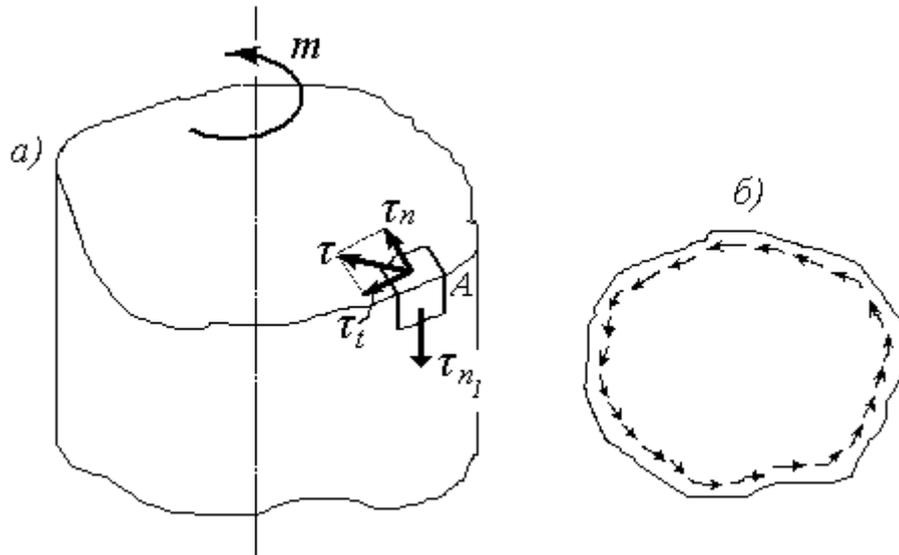


Рис. 9.20. Особенности распределения касательных напряжений в сечении бруса произвольной формы

2). **Если сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль** (рис. 9.21).

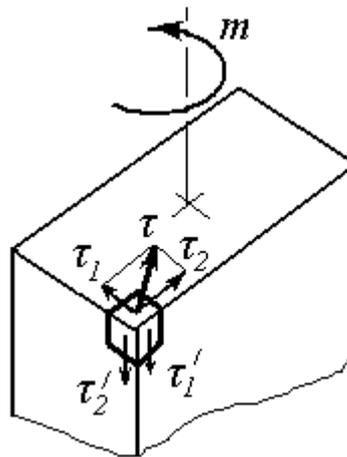


Рис. 9.21. Касательные напряжения во внешнем углу прямоугольного сечения

На рисунке 9.21 обозначено:

τ – касательное напряжение вблизи угла плоскости сечения по произвольному направлению;

τ_1 и τ_2 – касательные напряжения, направленные по нормали к сторонам угла;

τ'_1 и τ'_2 – парные касательные напряжения, действующие по перпендикулярным граням – по боковой поверхности бруса.

Выше был сделан вывод, что касательные напряжения на боковой поверхности равны нулю ($\tau_n = \tau_{n_1} = 0$). Поэтому $\tau'_1 = \tau'_2 = 0$. Следовательно, и $\tau_1 = \tau_2 = 0$.