Глава 2

ТЕОРИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ВИДАХ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Начертательная геометрия — наука о методах построения плоских изображений геометрических фигур, расположенных в пространстве трех измерений. Одной из основных целей начертательной геометрии является задача построения плоских изображений геометрических фигур, по которым получают точное представление о форме, размерах и положении этих фигур в пространстве. Эту задачу решают операцией проецирования, которая лежит в основе всех методов построения изображения на плоскости.

Пусть в пространстве задана плоскость Π' — плоскость проекций и некоторая точка A (рис. **2**.1, *а).* Через точку A проведем прямую l так, чтобы она пересекла плоскость Π' в некоторой точке A'. Построенную точку A' называют проекцией точки A, а прямую l — проецирующей прямой. Точку A принято называть оригиналом проекции A'. Если проецирующие прямые исходят из одной точки, то проецирование называется *центральным.* Центральной проекцией точки A называют точку A' пересечения проецирующей прямой SA с плоскостью проекции Π' (рис. **2**.1, *б).* Примерами центральных проекций являются фотоснимки, кинокадры, тени.

Если проецирующие прямые параллельны между собой и заданному направлению проецирования $\overline{s}$, то проецирование называется *параллельным. Параллельной проекцией* точки A называют точку A' пересечения проецирующей прямой $l \parallel \overline{s}$ с плоскостью проекций Π' (рис. **2**.1, *в).* Рассмотрим некоторые свойства параллельных проекций:

1) проекция прямой AB есть прямая $A'B'$ или точка, если $AB \parallel \overline{s}$;

2) точка С, принадлежащая прямой AB в пространстве, проецируется в точку C', принадлежащую проекции $A'B'$ прямой на плоскости;

3) отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется (см. рис. 2.1, в), т.е. $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|A'C'|}{|C'B'|}$;

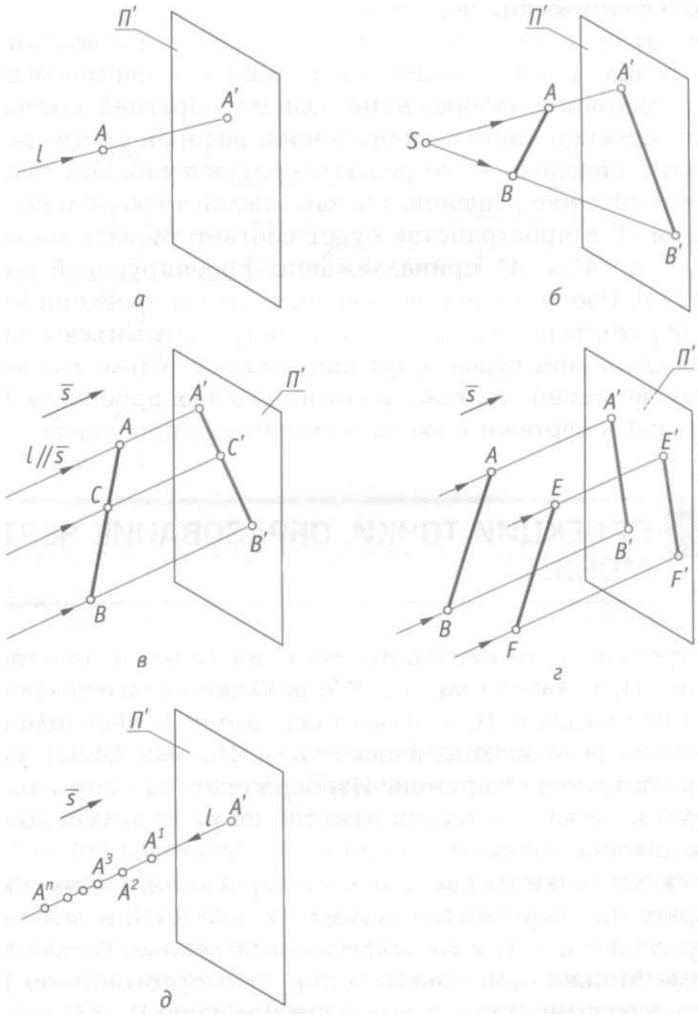


РИС. 2.1

4) прямые AB и EF, параллельные в пространстве, проецируются на плоскости в виде параллельных прямых $A'B'$ и $E'F'$ (рис. 2.1, *г*).

Если направление проецирования $\bar{s}$ составляет с плоскостью проекций Π' острый угол, то параллельную проекцию называют *косоугольной*. Если направление проецирования $\bar{s}$ перпендикулярно плоскости Π', то проецирование называют *ортогональным* *{прямоугольным)*. Свойства параллельных проекций действительны для ортогональных проекций, являющихся частным случаем параллельных. Ортогональное проецирование наиболее распространено в технических чертежах.

Методы проецирования на одну плоскость позволяют однозначно решать прямую задачу, т. е. по данному оригиналу строить его проекционное изображение. Однако обратная задача — по данному проекционному изображению воспроизвести (реконструировать) оригинал — не решается однозначно. Эта задача допускает множество решений, так как каждой точке A' в плоскости проекций Π' в пространстве будет соответствовать множество точек $A^1, A^2, A^3, \ldots, A^n$, принадлежащих проецирующей прямой l (рис. 2.1, *д*). Изображения, состоящие из одной проекции (см. рис. 2.1), необратимы и, следовательно, не могут называться чертежом.

В предлагаемом курсе будут применяться только два вида обратимых чертежей: чертежи в ортогональных проекциях (чертежи Монжа) и чертежи в аксонометрических проекциях.

2.2. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ. ОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА МОНЖА

Построение ортогональной проекции точки А на плоскость проекций Π_1 показано на рис. 2.2, *а*. *Ортогональной проекцией* точки А на плоскость Π_1 называют основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки А на плоскость Π_1. Прямая $AA_1 \perp \Pi_1$ называется проецирующей прямой. Изображение на одну плоскость проекций не является обратимым, т. е. по нему нельзя восстановить положение точки-оригинала в пространстве.

Проекции точки на две плоскости проекций. Схему построения обратимого чертежа предложил в конце XVIII в. знаменитый французский геометр и государственный деятель Госпар Монж. По схеме Монжа оригинал проецируется ортогонально на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2, где Π_1 — горизонтальная плоскость проекций, располагаемая в простран-

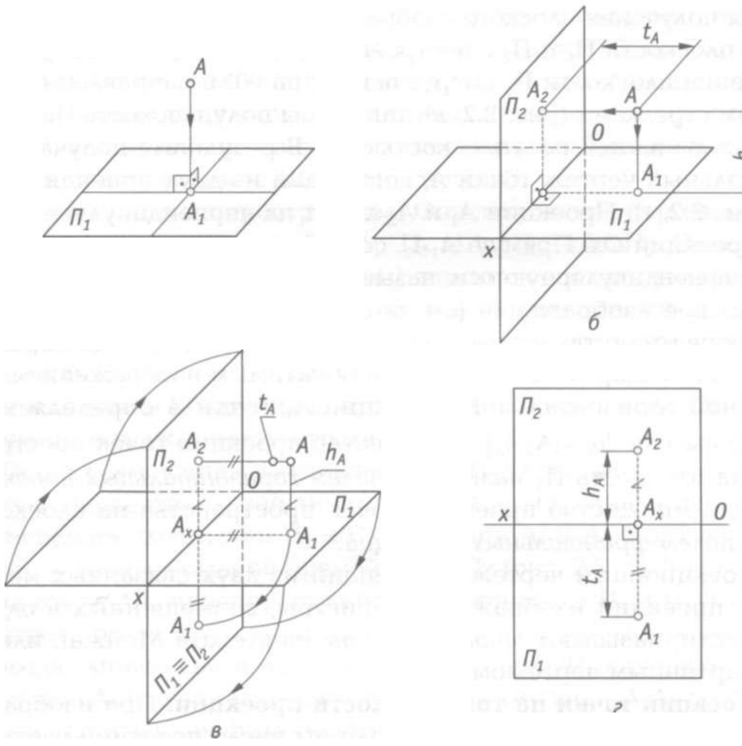


Рис. 2.2

стве горизонтально, а Π_2 — фронтальная плоскость проекций, располагаемая вертикально. Плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются между собой по прямой *Ox,* называемой осью проекций. Проекции точки *A* на плоскостях Π_1 и Π_2 обозначают A_1, A_2 и называют соответственно горизонтальной и фронтальной проекциями точки *A* (рис. 2.2, *б).*

Построенное изображение точки *A* на две плоскости проекций Π_1 и Π_2 является обратимым. Перпендикуляры A_1A и A_2A, восставленные в точках A_1 и A_2 соответственно к плоскостям Π_1 и Π_2, лежат в одной плоскости. Точка А их пересечения является искомой точкой пространства, определяемой данной парой точек A_1 и A_2. Удаление A_1A точки А от горизонтальной плоскости проекций Π_1 называют *высотой* точки А и обозначают h_A, а ее расстояние A_2A от фронтальной плоскости проекций Π_2 называют *глубиной* точки А и обозначают t_A. Построенные проекции точки расположены в разных плоскостях.

Для получения плоского изображения Монж предложил совместить плоскости Π_1 и Π_2 с построенными в них проекциями путем вращения плоскости Π_1 вокруг оси *Ox* на 90° в направлении, указанном стрелками (рис. 2.2, в), так чтобы полуплоскость Π_1 совместилась с нижней полуплоскостью Π_2. В результате получаем ортогональный чертеж точки *A*, состоящий из двух проекций: A_1 и A_2 (рис. 2.2, г). Проекции A_1 и A_2 лежат на перпендикуляре A_1A_2 к оси проекций *Ox*. Прямую A_1A_2, соединяющую две проекции точки и перпендикулярную оси, называют *линией проекционной связи.*

Плоское изображение (см. рис. 2.2, *г)* Монж назвал эпюром. На эпюре отсутствует точка-оригинал *A* и проецирующие прямые AA_1 и AA_2. Эпюр точки *A* является обратимым изображением. По заданной горизонтальной проекции A_1 точки А определяем на эпюре высоту $h_A = |A_2 A_x|$. Множество проекций точек пространства на плоскость Π_1 называют *полем горизонтальных проекций точек,* а множество проекций точек пространства на плоскость Π_2 — *полем фронтальных проекций.*

Проекционный чертеж, состоящий из двух связанных между собой проекций изображаемой фигуры, совмещенных в одной плоскости, называют *эпюром фигуры* (чертежом Монжа), или ее двухкартинным чертежом.

Проекции точки на три плоскости проекций. При изображении фигуры-оригинала сложной формы число проекций увеличи-

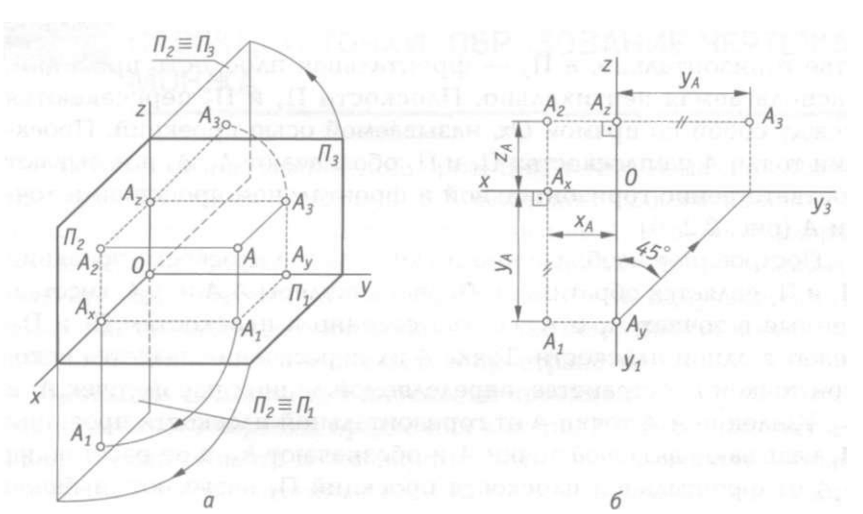


Рис. 2.3

вают. Рассмотрим проецирование точки на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций: Π_1, Π_2, Π_3 (рис. 2.3, *а).* Плоскость Π_3 называют профильной плоскостью проекций. Линии попарного пересечения трех плоскостей проекций образуют три оси *(Ox, Oy, Oz),* составляющие систему прямоугольных декартовых координат в пространстве с началом в точке *O.*

Пусть *A* — точка пространства. Опустим из нее перпендикуляры на плоскости проекций: $AA_1 \perp \Pi_1$, $AA_2 \perp \Pi_2$, $AA_3 \perp \Pi_3$. Основания перпендикуляров (точки A_1, A_2, A_3| являются соответственно горизонтальной, фронтальной и профильной проекциями в системе трех плоскостей проекций. При построении плоского чертежа плоскость Π_2 считают неподвижной, а плоскости Π_1 и Π_3 совмещают с ней путем вращения соответственно вокруг осей *Ox* и Oz в направлении, указанном стрелками.

После совмещения плоскостей Π_1 и Π_2 проекции A_1 и A_2 расположены на вертикальной линии связи $A_1A_2 \perp Ox$. Аналогично после совмещения плоскостей Π_3 и Π_2 проекции A_3 и A_2 будут на линии связи — горизонтальной прямой $A_2A_3 \perp Oz$ (рис. 2.3, *б).* Так как глубина точки AA_2 проецируется без искажения на Π_1 и Π_3, то точку A_3 строят по ее проекциям A_1 и A_2. Для этого через проекцию A_2 проводят линию связи $A_2A_3 \perp Oz$. Затем на поле Π_1 измеряют глубину точки A_1A_x и откладывают ее по линии связи A_2A_3 от оси *Oz* вправо, получая профильную проекцию A_3 точки А. Получаем ортогональный чертеж точки А в системе трех плоскостей проекций.

Первый раз ось *Oy* изображена и обозначена Oy_1 как результат ее вращения с плоскостью Π_1 до совмещения с осью *Oz,* а второй раз — Oy_3 как результат ее вращения с плоскостью Π_3 до совмещения с осью *Ox.* Плоскости Π_1, Π_2, Π_3 условно приняты ограниченными и непрозрачными и после совмещения их границы на эпюре не показывают (см. рис. 2.3, *б).*

В трехмерном пространстве положение точки определяют с помощью прямоугольных декартовых координат *x, y, z.* Координату *x* называют абсциссой, у — ординатой, z — аппликатой. Абсцисса *x* определяет расстояние от данной точки до плоскости Π_3, ордината у — до плоскости Π_2, аппликата *z* — до плоскости Π_1. Если точка А задана в пространстве координатами *x, y,* z, то это обозначается так: *A(x,* у, z). Положение точки A_1 на плоскости Π_1 определяют координатами x_A и y_A (см. рис. 2.3, *а)* и записывают так: $A_1(x_A, y_A)$. Положение т о ч A_2 н а плоскости Π_2 определяют координатами x_A, z_A и записывают т а $A_2(x_A, z_A)$. о ж е н и е точки A_3 в плоскости Π_3 определяют координатами y_A, z_A и записывают так: $A_3(y_A, z_A)$.

2.3. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Чертеж Монжа не очень нагляден. Для облегчения понимания формы проектируемого изделия и большей наглядности кроме рабочего чертежа выполняют аксонометрический чертеж. Такой чертеж строят с помощью центрального, параллельного или ортогонального (прямоугольного) проецирования. Слово «аксонометрия» в переводе с греческого означает *измерение по осям.*

Пусть *Oxyz* — некоторая натуральная система координат, с которой жестко связана точка А (рис. 2.4, а), где:

e_x, e_y, e_z — натуральные масштабные единицы, т.е. отрезки, равные единице длины е и отложенные от начала координат *O* по координатным осям *x, y,* z;

A_1 — ортогональная проекция точки *A* на координатную плоскость *xOy* (можно взять и точки A_2, A_3 — ортогональные проекции точки *A* на координатные плоскости *xOz* и *yOz* соответственно);

OA_xA_1A — натуральная координатная ломаная точки А, длины отрезков которой определяют натуральные координаты заданной точки, т.е. $|OA_x| = x_A$; $|A_xA_1| = y_A$; $|A_1A| = z_A$.

Выберем некоторую плоскость проекций Π', называемую аксонометрической плоскостью проекций. Спроецируем ортогонально точку А с ее проекцией A_1, осями координат и координатной ломаной на плоскость Π'. Проекции перечисленных геометрических элементов на плоскость Π' называют *аксонометрическими,* например:

A' — аксонометрическая проекция точки А, или аксонометрия точки А;

e'_x, e'_y, e'_z — аксонометрические проекции натуральных масштабных единиц, или аксонометрические масштабные единицы;

$O'A'_xA'_1A'$ — аксонометрическая проекция натуральной координатной ломаной точки А, или аксонометрическая координатная ломаная точки А, длины отрезков которой определяют ее аксонометрические координаты, т.е. $|O'A'_x| = x'_A$; $|A'_xA'_1| = y'_A$; $|A'_1A'| = z'_A$.

Аксонометрическую проекцию A'_1 точки A_1 (первичной) называют *вторичной проекцией* точки А, или ее *основанием.* Термин «вторичная проекция» подчеркивает, что точка A'_1 получена посредством двух последовательных ортогональных проецирований: первый раз — на *xOy,* второй раз — на Π'.

Изображение на Π', включающее в себя аксонометрию A' точки А, ее вторичную проекцию A'_1, оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ и масштабные единицы e'_x, e'_y, e'_z на них, называют *аксонометрическим чертежом* точки А (рис. 2.4, *б)*. Этот чертеж обратим, поскольку проекции A' и A'_1 точки А однозначно определяют ее положение в пространстве. Согласно свойству 3 (см. подразд. 2.1) параллель-

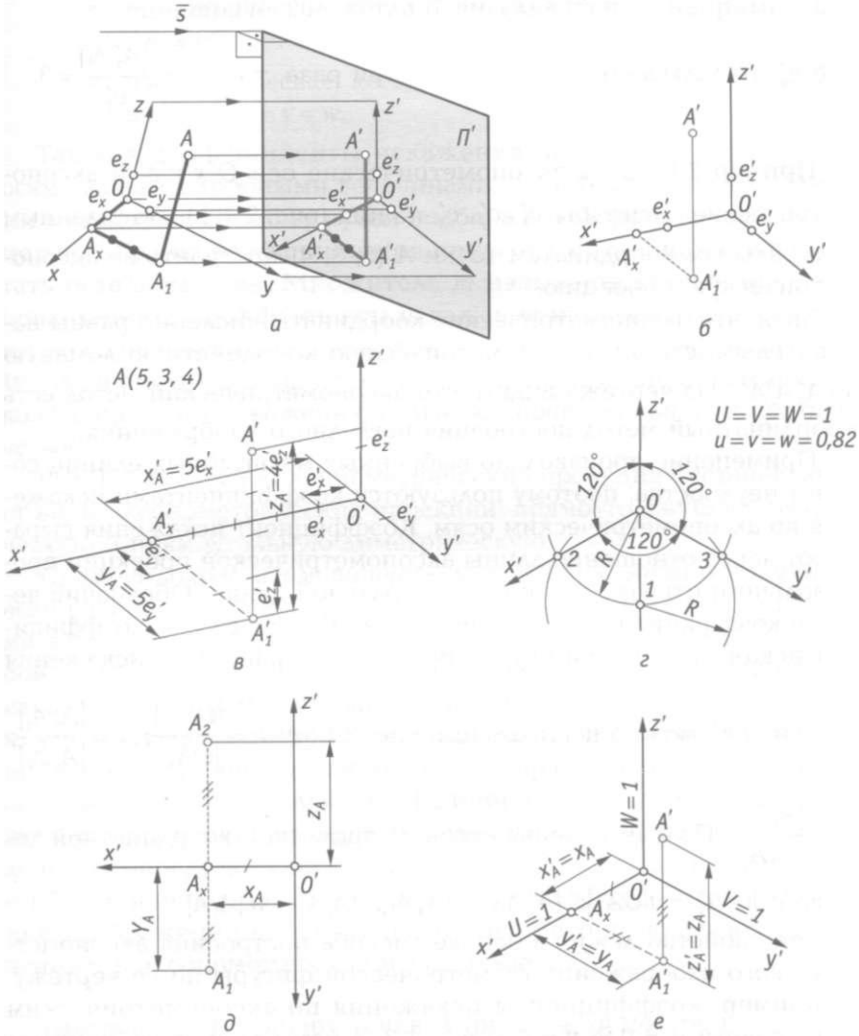


Рис. 2.4

ных проекций аксонометрический масштаб, например, e'_y отложится на звене $A'_xA'_1$ столько раз, сколько натуральный масштаб e_y откладывается на звене A_xA_1.

Аксонометрические координаты точки А, измеренные аксонометрическими масштабами, численно равны ее натуральным координатам. Если натуральный масштаб e_y откладывают на звене

A_xA_1 три раза, т.е. $y_A = \frac{|A_xA_1|}{e_y} = 3$, то и аксонометрический масш-

таб e'_y откладывают на звене $A'_xA'_1$ три раза, т.е. $y'_A = \frac{|A'_xA'_1|}{e'_y} = 3.$

Пример 2.1. Даны аксонометрические оси $O'x'y'z'$ и аксонометрические масштабы e'_x, e'_y, e'_z на них (рис. 2.4, в). По заданным натуральным координатам точки А (5, 3, 4) построить ее аксонометрическую проекцию.

Зная, что аксонометрические координаты численно равны натуральным, строим аксонометрическую координатную ломаную $O'A'_xA'_1A'$. Из чертежа видим, что аксонометрический метод есть координатный метод построения наглядного изображения.

Применение произвольно выбранных масштабных единиц создает неудобства, поэтому пользуются коэффициентами искажения по аксонометрическим осям. Коэффициент искажения выражают через отношение длины аксонометрической проекции произвольного отрезка оси к его натуральной длине. Обозначив через *u* коэффициент искажения по оси $O'x'$, через *v* — коэффициент искажения по оси $O'y'$, через *w* — коэффициент искажения

по оси $O'z'$, можно написать (см. рис. 2.4, *а*): $u = \frac{|O'A'_x|}{|OA_x|}$; $v = \frac{|A'_xA'_1|}{|A_xA_1|}$;

$w = \frac{|A'_1A'|}{|A_1A|}$ $|O'A'_x| = u|OA_x|$; $|A'_xA'_1| = v|A_xA_1|$; $|A'_1A'| = w|A_1A|$. натной ломаной:

Это свойство лежит в основе способа построения аксонометрического изображения геометрической фигуры по ее чертежу. Например, коэффициенты искажения по аксонометрическим осям равны: u = 0,9; v = 0,5; w = 1,3, а натуральные координаты точки *А* в миллиметрах, взятые с чертежа Монжа, имеют значения: x = 80; y = 60; z = 100. Тогда аксонометрические координаты точки А примут следующие значения: $x' = x \times u$ = 80 x 0,9 = 72; $y' = y \times v$ = 60x0,5 = 30; $z' = z \times w$ = 100x1,3 = 130.

В зависимости от соотношений величин коэффициентов искажения прямоугольные аксонометрические проекции подразделяются:

- на *триметрические,* когда все три коэффициента искажения различные, т. е. $u \neq v \neq w$;
- *диметрические,* когда равны два из них, например: $u = w \neq v$;
- *изометрические,* когда все три коэффициента одинаковые, т. е. $u = v = w$.

Так как коэффициенты искажения по аксонометрическим осям являются дробными величинами, пользоваться ими на практике неудобно. Поэтому путем подбора некоторого множителя m можно один из коэффициентов привести к единице и пересчитать остальные два. Множитель m называют коэффициентом приведения, а коэффициенты искажения называют приведенными и обозначают заглавными буквами латинского алфавита U, V, W. Аксонометрическую проекцию, построенную по приведенным коэффициентам искажения, называют *приведенной,* или *практической.*

ГОСТ 2.317 — 69 «Аксонометрические проекции» устанавливает виды аксонометрических проекций: прямоугольную изометрическую и прямоугольную диметрическую.

Прямоугольную изометрическую проекцию можно получить, если расположить натуральные оси координат под равными углами к плоскости Π'. Аксонометрические оси образуют между собой углы, равные 120° (рис. 2.4, г). Приведенные коэффициенты искажения по трем осям равны единице: $U = V = W = 1$. Для прямоугольных аксонометрий натуральные коэффициенты искажения меньше единицы (в частности, для прямоугольной изометрии он равен 0,82). Поскольку коэффициенты искажения для этого вида аксонометрии приведены к единице, то коэффициент приведения m определяют из условия: $u \times m = 1$, отсюда $m = 1 : 0{,}82 = 1{,}22$. При использовании приведенных коэффициентов искажения изображение в прямоугольной изометрии получают увеличенным в аксонометрическом масштабе 1,22: 1.

Пример 2.2. По эпюру точки А (рис. 2.4, *д)* построить ее прямоугольную изометрию.

Сначала строят аксонометрические оси прямоугольной изометрии (см. рис. 2.4, г). Выполняют построение вторичной горизонтальной проекции A'_1 (аксонометрию горизонтальной проекции A_1) точки A по ее координатам $x'_A = x_A$ и $y'_A = y_A$. Координаты x_A и y_A берут с эпюра. Для этого от начала координат O' по оси $O'x'$ откладывают отрезок $O'A'_x$, равный координате x_A точки A (рис. 2.4, е). Из точки A'_x проводят прямую, параллельную оси $O'y'$, и на ней откладывают отрезок $A'_x A'_1$, равный координате y_A точки A. Построенная точка A'_1 — вторичная горизонтальная проекция точки A. Из точки A'_1 проводят прямую, параллельную оси $O'z'$ и на ней откладывают отрезок A'_1A', равный координа z_A, взятый с эпюра. Построенная точка A' — искомая изометрия точки A.

Прямоугольную диметрическую проекцию получают, если двум осям координат (обычно *Ox* и *Oz)* приданы равные углы наклона к плоскости Π', а третья ось *Oy* наклонена так, что коэффициент искажения по ней вдвое меньше коэффициентов искажения по *Ox* и *Oz.* Если ось $O'z'$ расположить вертикально (рис. 2.5, а), то ось $O'x'$ образует с горизонтальной прямой угол $7°10'$, ось $O'y'$ — угол $41°25'$, Эти углы строят по их тангенсам, прин $\operatorname{tg} 7°10' =$ $= 1/8$, $\operatorname{tg} 41°25' \approx 7/8$. Приведенные коэффициенты искажения по $O'x'$ и $O'z'$ равны единице, а по $O'y'$ — вдвое меньше, т.е. $U =$ $= 1$, $V = 0{,}5$. Так как натуральные коэффициенты искажения по осям $O'x'$ и $O'z'$ одинаковые и равны 0,94, а по оси $O'y'$ равны 0,47, изображения в приведенной прямоугольной диметрии будут увеличены в 1,06 раза, т.е. можно говорить об аксонометрическом масштабе 1,06: 1. Построение прямоугольной диметрии точки A (рис. 2.5, *б)* выполняют по ее ортогональным проекциям (см. рис. 2.4, *д).* Отрезок, параллельный оси $O'y'$, уменьшится в два раза,

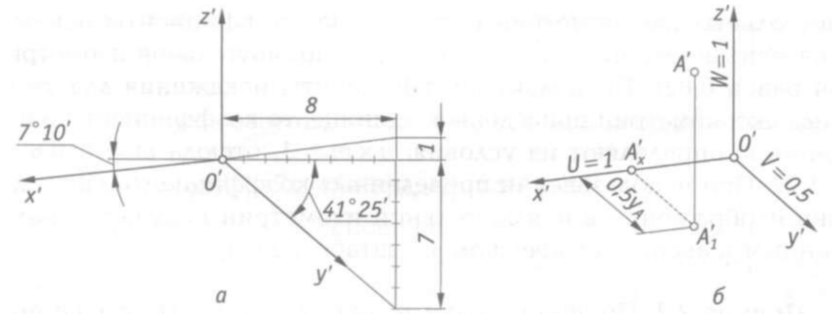


Рис. *2.1*

так как приведенный коэффициент искажения V по этой оси равен 0,5.

2.4. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ

2.4.1. Задание прямой

В пространстве положение прямой может быть определено:

- двумя точками A и B и записывается так: $l(A; B)$;
- точкой и направлением, т. е. прямая l будет проходить через заданную точку A параллельно выбранному направлению $\bar{m}$; записывается так: $l(A; \bar{m})$;
- двумя плоскостями, как линия их пересечения, т.е. $l = \alpha \cap \beta$, и др.

На чертеже прямую l задают проекциями: двух точек, точки и направления, двух пересекающихся плоскостей и т.д. По расположению относительно плоскостей проекций прямые бывают общего и частного положений.

2.4.2. Прямая общего положения

Прямая общего положения — прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций. В пространстве прямую линию однозначно определяют две точки: A и B (рис. 2.6, а), ограничиваю-

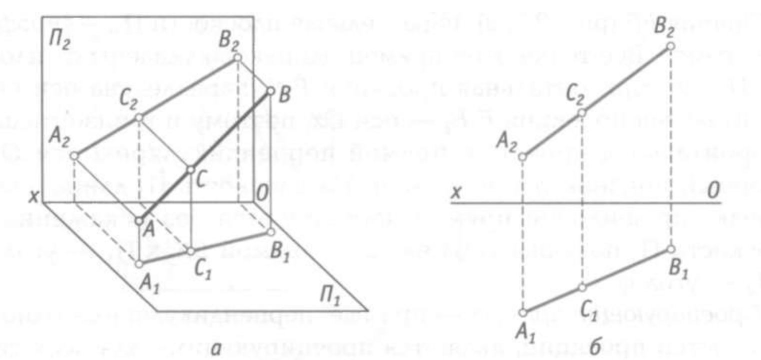


Рис. 2.6

щие отрезок [AB] прямой и определяющие положение прямой как безграничной линии. На эпюре (рис. 2.6, б) прямая общего положения задана проекциями двух точек: А и В, где A_1B_1 — горизонтальная проекция прямой; A_2B_2 — ее фронтальная проекция. На прямой *AB* выберем точку С (см. рис. 2.6, *а)* и построим ее проекции на Π_1 и Π_2. Эпюрный признак принадлежности точки и прямой: если точка С принадлежит прямой *AB,* то ее проекции C_1 и C_2 принадлежат одноименным проекциям A_1B_1 и A_2B_2 прямой *AB,* т.е. если С $\in$ (AB), то $C_1 \in A_1B_1$, а $C_2 \in A_2B_2$.

2.4.3. Прямые частного положения

Прямая частного положения — прямая, параллельная или перпендикулярная плоскостям проекций. Прямую, параллельную одной из трех плоскостей проекций, называют *линией уровня.* Прямая AB, параллельная плоскости Π_1, — *горизонтальная прямая* (рис. 2.7, *а).* Все ее точки удалены от плоскости Π_1 на одинаковом расстоянии. Проекция A_2B_2 параллельна оси *Ox* — эпюрный признак прямой. Профильная проекция этой прямой параллельна оси Oy_3. На плоскость Π_1 длина любого отрезка такой прямой проецируется без искажения. Угол φ — угол наклона горизонтальной прямой к плоскости Π_2

Прямая *CD,* параллельная плоскости Π_2, — *фронтальная прямая* (рис. 2.7, б). Все точки этой прямой одинаково удалены от плоскости Π_2. Ее горизонтальная проекция C_1D_1 параллельна оси *Ox* — эпюрный признак прямой. Профильная проекция C_3D_3 параллельна оси *Oz.* На плоскость Π_2 длина любого отрезка фронтальной прямой проецируется без искажения. Угол θ — угол наклона фронтальной прямой *CD* к плоскости Π_1

Прямая *EF* (рис. 2.7, *в),* параллельная плоскости Π_3, — *профильная прямая.* Все точки этой прямой одинаково удалены от плоскости Π_3. Ее горизонтальная проекция E_1F_1 параллельна оси Oy_1, а фронтальная проекция E_2F_2 — оси *Oz,* поэтому и горизонтальная, и фронтальная проекции прямой перпендикулярны оси *Ox* — эпюрный признак такой прямой. На плоскость Π_3 длина любого отрезка профильной прямой проецируется без искажения. На плоскости Π_3 получим углы наклона прямой *EF:* к Π_1 — угол θ, а к Π_2 — угол φ.

Проецирующие прямые — прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, являются проецирующими для всех своих точек. Прямая AB, перпендикулярная плоскости Π_1, — *горизон-*

тально-проецирующая прямая (рис. 2.8, а). Ее горизонтальная проекция $A_1 \equiv B_1$ вырождается в точку (эпюрный признак прямой $AB \perp \Pi_1$), а A_2B_2 и A_3B_3 параллельны вертикальным линиям связи.

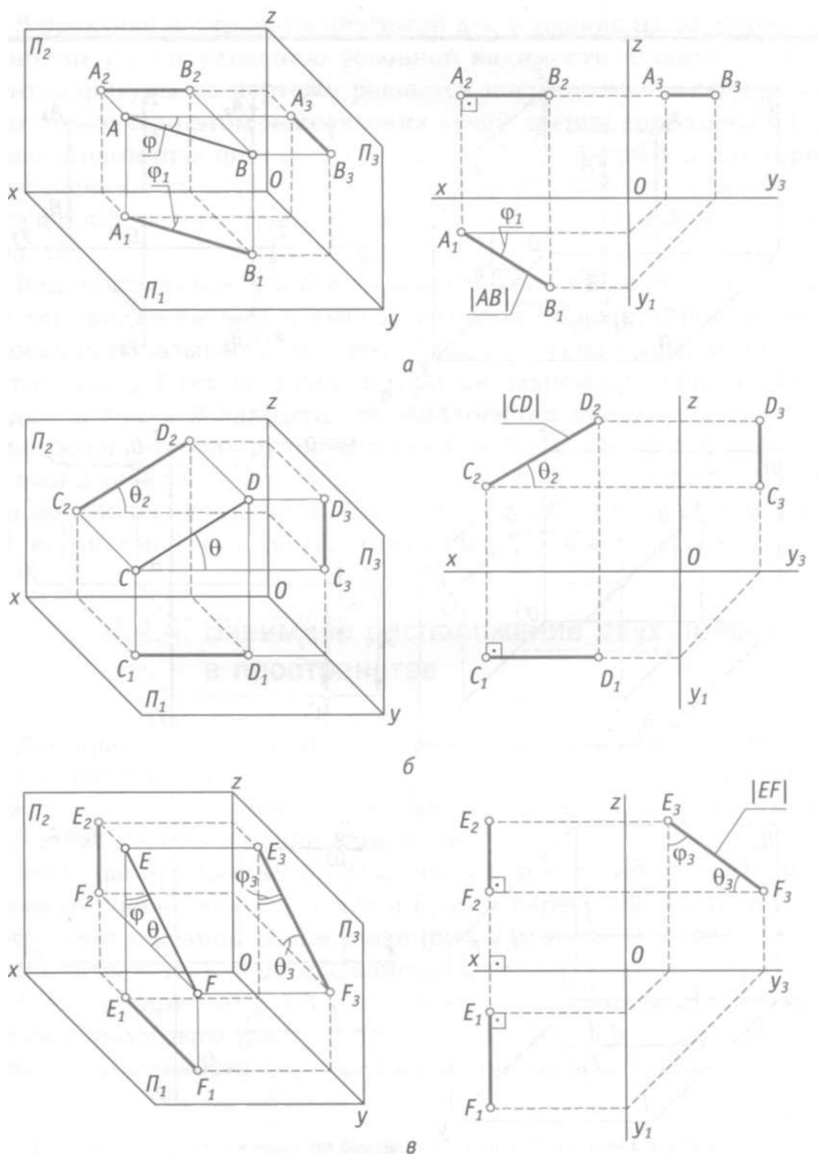


Рис. 2.7

Фронтально-проецирующая прямая CD, перпендикулярная плоскости Π_2, проецирует свои точки, в том числе C и *D,* на плоскость Π_2 в одну точку, т. е. $C_2 \equiv D_2$ — эпюрный признак прямой (рис. 2.8, *б).* Проекция C_1D_1 параллельна вертикальной линии связи, а проекция C_3D_3 параллельна горизонтальной линии связи.

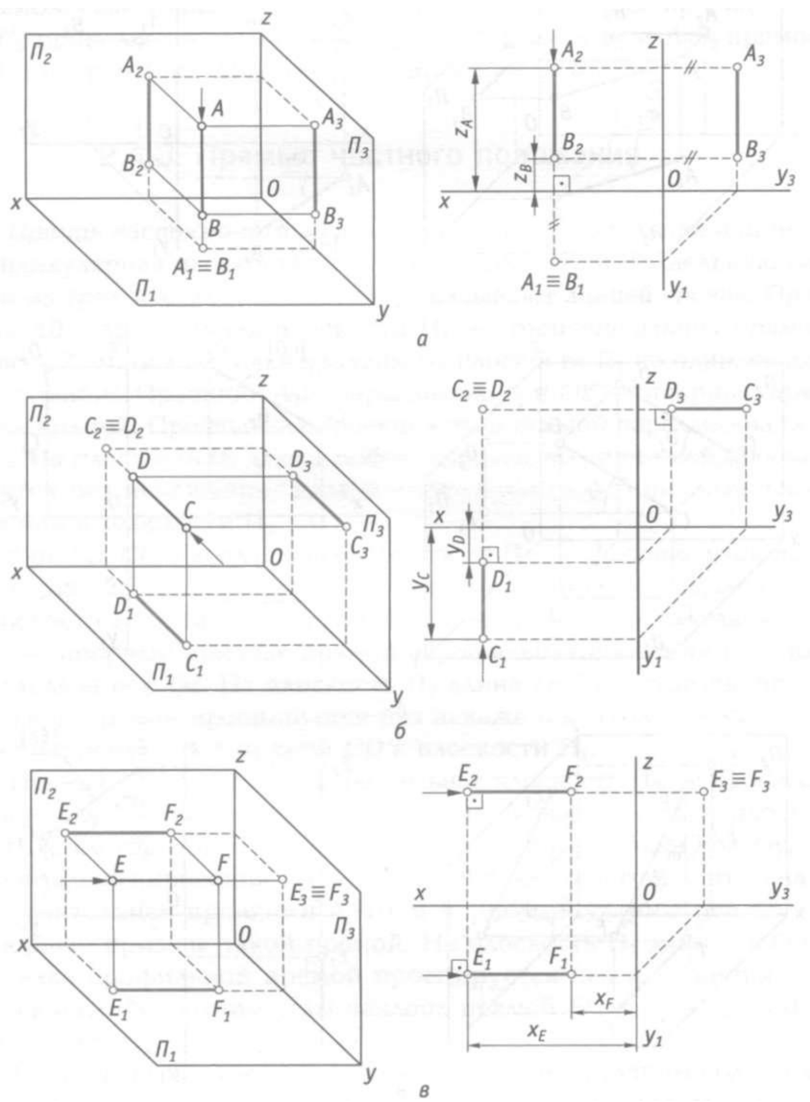


Рис. 2.8

Профильно-проецирующая прямая EF, перпендикулярная плоскости Π_3, проецирует свои точки, в том числе E и F, на плоскость Π_3 в одну точку, т. е. $E_3 \equiv F_3$ — первый эпюрный признак прямой EF (рис. 2.8, в). E_1F_1 и E_2F_2 параллельны горизонтальным линиям связи и оси Ox — второй эпюрный признак прямой EF.

В практике построения чертежей для усиления их наглядности прибегают к определению условной видимости. Видимость элементов фигуры на чертеже решается посредством конкурирующих точек. При этом направления лучей зрения совпадают с направлениями проецирования (см. рис. 2.8, а). Например, для горизонтально-конкурирующих точек *A и B* направление луча зрения (его фронтальная проекция показана стрелкой) совпадает с прямой AB.

Видимость точек А и В в горизонтальной проекции определяют так: видна та точка, высота которой больше. Фронтальная проекция показывает, что точка А расположена выше, чем точка B, т.е. $z_A > z_B$. Следовательно, в горизонтальной проекции точка А видна, а точка B закрыта ею. Аналогично видно, что из двух фронтально-конкурирующих точек C и D (см. рис. 2.8, *б)* на поле Π_2 видна точка C, так как $y_C > y_D$. То же можно сказать о видимости профильно-конкурирующих точек E и F на поле Π_3 (см. рис. 2.8, *в).* Видимой на поле Π_3 будет точка E, поскольку $x_E > x_F$.

2.4.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут пересекаться, т.е. лежать в одной плоскости и иметь общую точку; быть параллельными, т. е. лежать в одной плоскости и не иметь общей точки; скрещиваться, т.е. не лежать в одной плоскости.

Если две прямые AB и CD пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются, а точки K_1 и K_2 пересечения этих проекций* лежат на одной линии связи (рис. 2.9, *а),* т.е. $K_1K_2 \perp Ox$ (эпюрный признак двух пересекающихся прямых).

Если две прямые a и b параллельны, то их одноименные проекции параллельны (рис. 2.9, *б], т.е.* $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$ (эпюрный признак параллельности двух прямых в пространстве).

* В дальнейшем изложении на большинстве ортогональных чертежей элементы пространства будут изображаться двумя проекциями, чаще всего — горизонтальной и фронтальной.

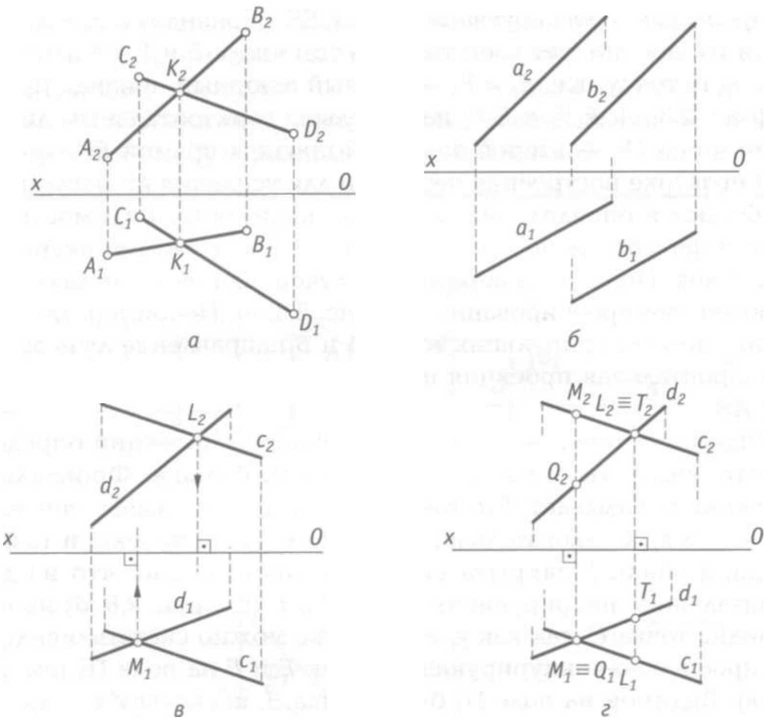


Рис. 2.9

Если прямые *cud* скрещиваются, то их одноименные проекции пересекаются в точках M_1 и L_2, не лежащих на одной линии связи (рис. 2.9, в), т.е. $M_1 L_2$ не перпендикулярна оси *Ox* (эпюрный признак скрещивающихся прямых).

Выясним видимость прямых c и d в горизонтальной проекции. Отметим точку пересечения проекций c_1 и d_1. Эта точка является горизонтальной проекцией двух горизонтально-конкурирующих точек M_1 и Q_1, одна из которых (точка M_1) лежит на прямой c, а другая (точка O) — на прямой d. Горизонтальные проекции этих точек совпадают, т. е. $M_1 \equiv Q_1$, а проекции M_2 и Q_2 различны. Из двух горизонтально-конкурирующих точек Ми O видна та, высота которой над горизонтальной плоскостью больше, т.е. точка *M,* так как $z_M > z_Q$. Следовательно, прямая c в этом месте проходит над прямой *d.* Для выяснения видимости прямых во фронтальной проекции выделим на них пару фронтально-конкурирующих точек: *L* и *T.* Фронтальные проекции этих точек совпадают:

$L_2 \equiv T_2$, а проекции L_1 и T_1 различны, причем глубина точки L больше, т.е. $y_L > y_T$, поэтому прямая c, которой принадлежит эта точка, проходит перед прямой d.

2.4.5. Проецирование плоских углов

Любой плоский угол (острый, тупой или прямой) проецируется на плоскость проекций без искажения, если плоскость угла параллельна плоскости проекций. Признак проецирования прямого угла без искажения на плоскость проекций формулируется в теореме о проецировании прямого угла: чтобы прямой угол проецировался на плоскость проекций в натуральную величину, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна, а другая не перпендикулярна этой плоскости.

На основании этой теоремы горизонтальная проекция $A_1B_1C_1$ прямого угла ABC, у которого сторона $AB \parallel \Pi_1$, спроецируется на плоскость Π_1 без искажения, т.е. $\angle A_1B_1C_1 = 90°$ (рис. **2.10**, *а*). Если же сторона BC прямого угла параллельна плоскости Π_2, то угол ABC спроецируется без искажения на плоскость Π_2, т.е. $\angle A_2B_2C_2$ - **90°** (рис. **2.10**, *б*).

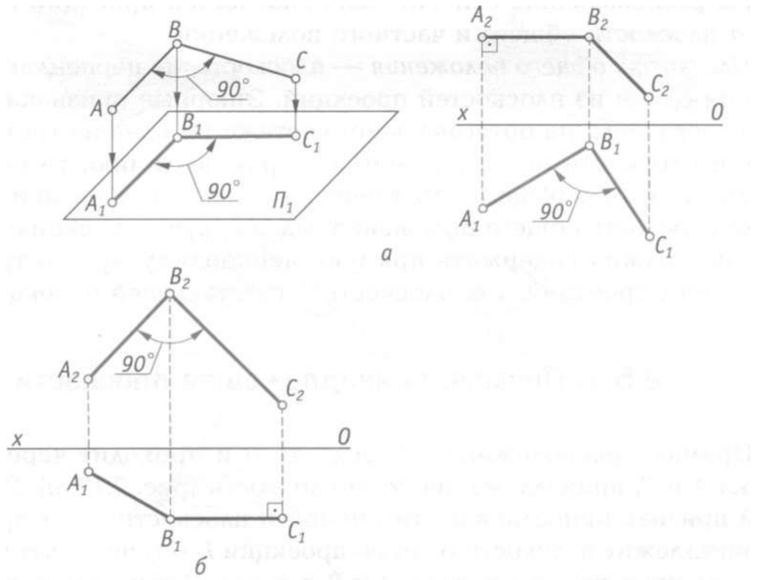


РИС. 2.10

2.5. ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется:

- тремя точками *A, B и C,* не лежащими на одной прямой, и записывается так: α(A, *B, C);*
- прямой *DE* и точкой *F,* не лежащей на этой прямой, и записывается так: β *(DE, F);*
- параллельными прямыми *GH* и *KL* и записывается так: $\gamma(GH \parallel KL)$
- пересекающимися прямыми *MN* и *PQ* и записывается так: $\gamma(MN \cap PQ)$

Плоскость в пространстве также может задаваться плоским многоугольником, окружностью, плоской кривой или ее дугой.

На эпюре Монжа плоскость а задана, но не ограничена в простирании проекциями элементов, определяющих ее в пространстве, т. е. проекциями: трех точек A, *B,* C, не лежащих на одной прямой (рис. 2.11, а); прямой *AB* и точки C, не лежащей на этой прямой (рис. 2.11, *б);* двух пересекающихся прямых *AB* и *BC* (рис. 2.11, в); двух параллельных прямых *AB* и *1* (рис. 2.11, г); треугольника *ABC* (рис. 2.11, *д).*

По расположению относительно плоскостей проекций различают плоскости общего и частного положений.

Плоскость общего положения — плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций. Эпюрные признаки этой плоскости: если на ортогональном чертеже ни одна из трех проекций плоскости не вырождается в прямую линию, то на нем задана плоскость общего положения (см. рис. 2.11, *д)* если на чертеже плоскость общего положения задана двумя проекциями, то она не должна содержать прямую, перпендикулярную третей плоскости проекций, т. е. плоскости отсутствующей проекции.

2.5.1. Прямая, принадлежащая плоскости

Прямая *1* расположена в плоскости а и проходит через две точки A и B, принадлежащие этой плоскости (рис. 2.12, *а).* Эпюрный признак принадлежности прямой и плоскости: если прямая l принадлежит плоскости α, то ее проекции l_1 и l_2 проходят через одноименные проекции точек A и B, т. е. если *1* принадлежит α, то l_1 проходит через A_1 и B_1, а l_2 — через A_2 и B_2

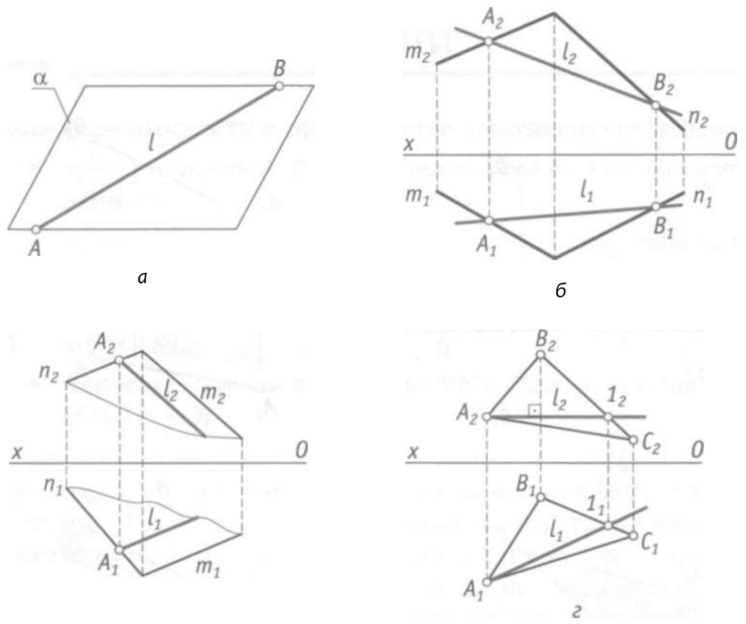


Рис. 2.12

Пример 2.3. Дана плоскость α $(m \cap n)$ и прямая *1* своей горизонтальной проекцией l_1, Построить фронтальную проекцию l_2, если прямая *1* принадлежит плоскости α (рис. 2.12, *б).*

Прямая *1,* принадлежащая плоскости α, имеет с ней две общие точки А и В — точки пересечения прямой *1* соответственно с прямыми m и *n.*

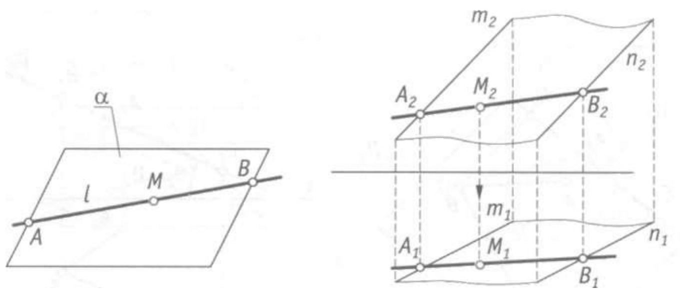
Построим их горизонтальные проекции A_1 и B_1 как результат пересечения проекции l_1 с одноименными проекциями m_1 и n_1 заданных прямых *тип.* Проекции A_2, B_2 точек *А и В* определены пересечением m_2, n_2 и вертикальных линий связи, проведенных через точки A_1 и B_1

Искомую проекцию l_2 прямой l получим, соединив построенные точки A_2 и B_2.

Прямая *1* принадлежит плоскости α, если она имеет с ней общую точку А и параллельна любой прямой *т* этой плоскости. На эпюре плоскости $\alpha(m \cap n)$ построены проекции l_1 и l_2 прямой l, проходящей через точку А этой плоскости параллельно прямой *т* (рис. 2.12, в). На рис. 2.12, *г* изображена плоскость общего положения.

2.5.2. Точка, принадлежащая плоскости

Точка M принадлежит плоскости α, если эта точка принадлежит любой прямой l данной плоскости (рис. 2.13, а). Эпюрный признак принадлежности точки и плоскости: точка M принадлежит плоскости, если проекции этой точки M_1 и M_2 принадлежат одноименным проекциям l_1 и l_2 прямой l данной плоскости, т.е. $M_1 \in l_1$, а $M_2 \in l_2$.



а б

Рис. 2.13

Пример 2.4. На эпюре заданы плоскость $\alpha\ (m \parallel n)$ и фронтальная проекция точки M, принадлежащей плоскости α (рис. 2.13, б). Требуется построить горизонтальную проекцию точки M.

В поле Π_2 через проекцию M_2 точки M проведем одноименную проекцию l_2 произвольной прямой l, лежащей в плоскости α, и отметим точки A_2 и B_2 ее пересечения с проекциями m_2, n_2 прямых яг и н плоскости α. Строим проекции A_1, B_1 и прямую l_1, проходящую через точки A_1 и B_1, Проекция M_1 определена на пересечении l_1 и линии связи, проведенной через точку M_2.

2.5.3. Плоскости частного положения

Плоскость частного положения — плоскость, перпендикулярная или параллельная одной из плоскостей проекций. Плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, — *проецирующие.* Плоскость, перпендикулярная плоскости Π_1, — *горизонтально-проецирующая;* перпендикулярная плоскости Π_2 — *фронталь-*

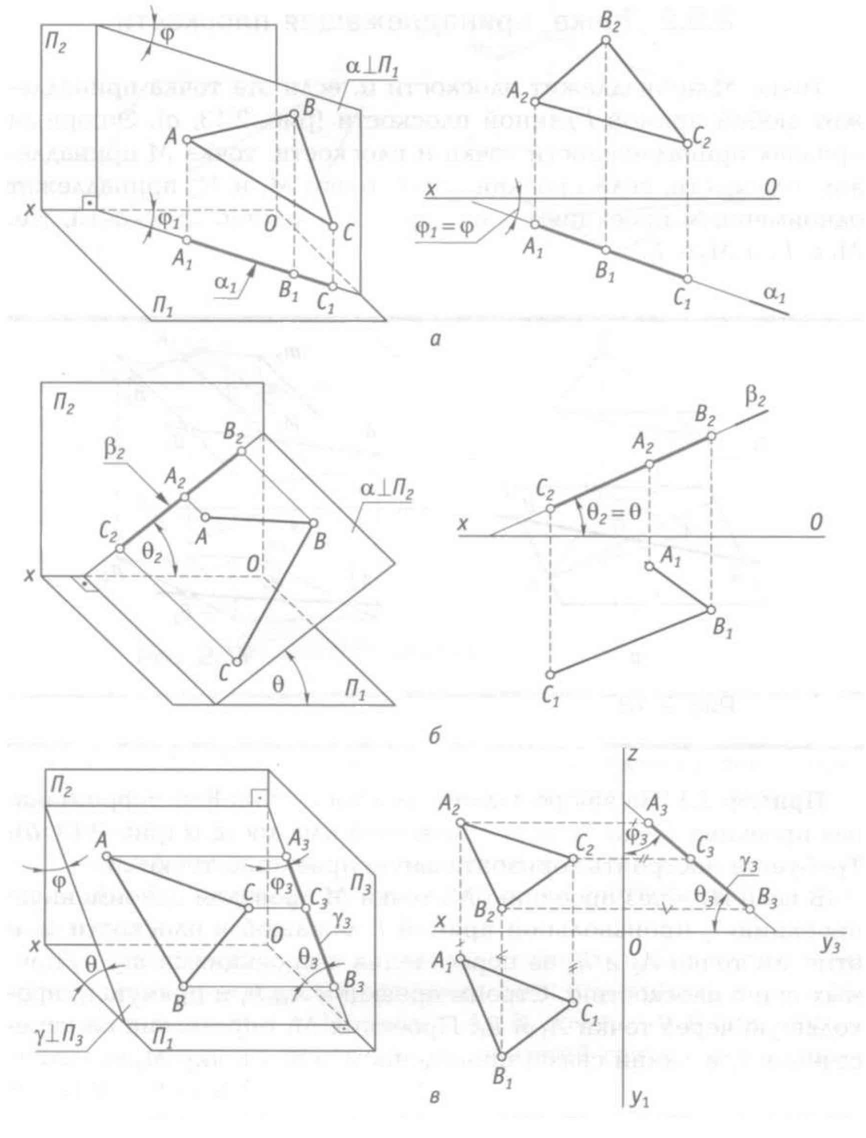


Рис. 2.14

но-проецирующая; перпендикулярная плоскости Π_3 — *профильно-проецирующая.* Эпюрный признак проецирующих плоскостей: одна из проекций плоскостей вырождается в прямую, на которой располагаются проекции всех фигур, лежащих в этой плоскости.

Горизонтальная проекция треугольника *ABC*, расположенного в плоскости а (рис. 2.14, а), совпадает с вырожденной проекцией α_1 т. е. $\alpha_1 \equiv A_1B_1C_1$. Двугранный угол φ, образованный плоскостью α и плоскостью проекций Π_2, проецируется на без искажения в угол φ_1 между вырожденной проекцией α_1 и осью *Ox*.

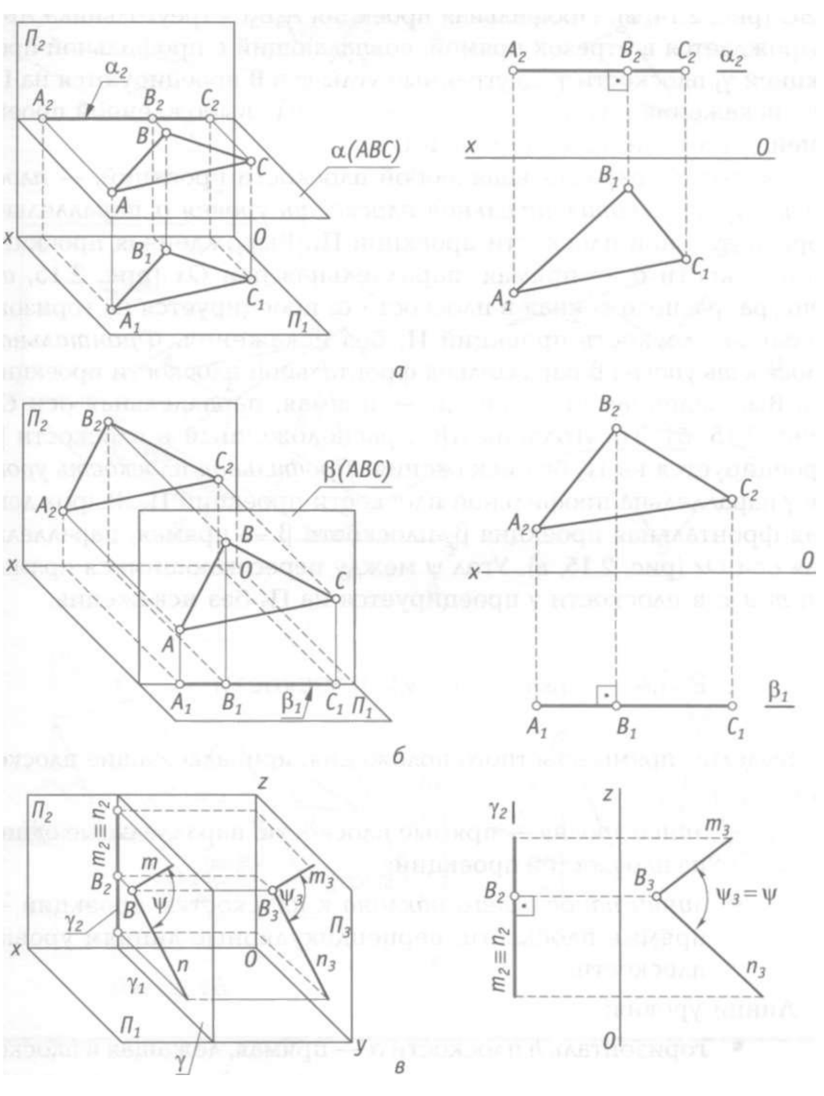


Рис. 2.15

Фронтально-проецирующая плоскость β (рис. 2.14, *б)* задана пересекающимися прямыми *AB* и *BC*. Фронтальные проекции

$A_2B\ \beta_2 \equiv A_2B_2 \equiv B_2C_2$от с вырожденной θронтальной проекц β й Π_1

проецируется на Π_2 без искажения в угол θ_2, образованный вырожденной проекцией β_2 и осью проекций *Ox*.

Профильно-проецирующая плоскость γ задана треугольником *ABC* (рис. 2.14, *в)*. Профильная проекция $A_3B_3C_3$ треугольника *ABC* вырождается в отрезок прямой, совпадающий с профильной проекцией γ_3 плоскости γ. Двугранные углы φ и θ проецируются на Π_3 без искажения в углы φ_3 и θ_3, образованные вырожденной проекцией γ_3 и осями проекций *Oz* и Oy_3

Плоскость, параллельная любой плоскости проекций, — *плоскость уровня. Горизонтальная плоскость уровня* α параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1. Вырожденная проекция α_2 плоскости α — прямая, параллельная оси *Ox* (рис. 2.15, *а)*. Фигура, расположенная в плоскости α, проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1 без искажения. *Фронтальная плоскость уровня* β параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2. Вырожденная проекция β_1 — прямая, параллельная оси *Ox* (рис. 2.15, *б)*. Треугольник *ABC,* расположенный в плоскости β, проецируется на Π_2 без искажения. *Профильная плоскость уровня у* параллельна профильной плоскости проекций Π_3. Вырожденная фронтальная проекция β_2 плоскости β — прямая, параллельная оси *Oz* (рис. 2.15, в). Угол ψ между пересекающимися прямыми *m* и л в плоскости γ проецируется на Π_3 без искажения.

2.5.4. Главные линии плоскости

Выделим прямые частного положения, принадлежащие плоскости:

- *линии уровня* — прямые плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций;
- *линии наибольшего наклона* к плоскостям проекций — прямые плоскости, перпендикулярные линиям уровня плоскости.

Линии уровня:

- горизонталь h плоскости α — прямая, лежащая в плоскости α и параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 2.16, *а);*

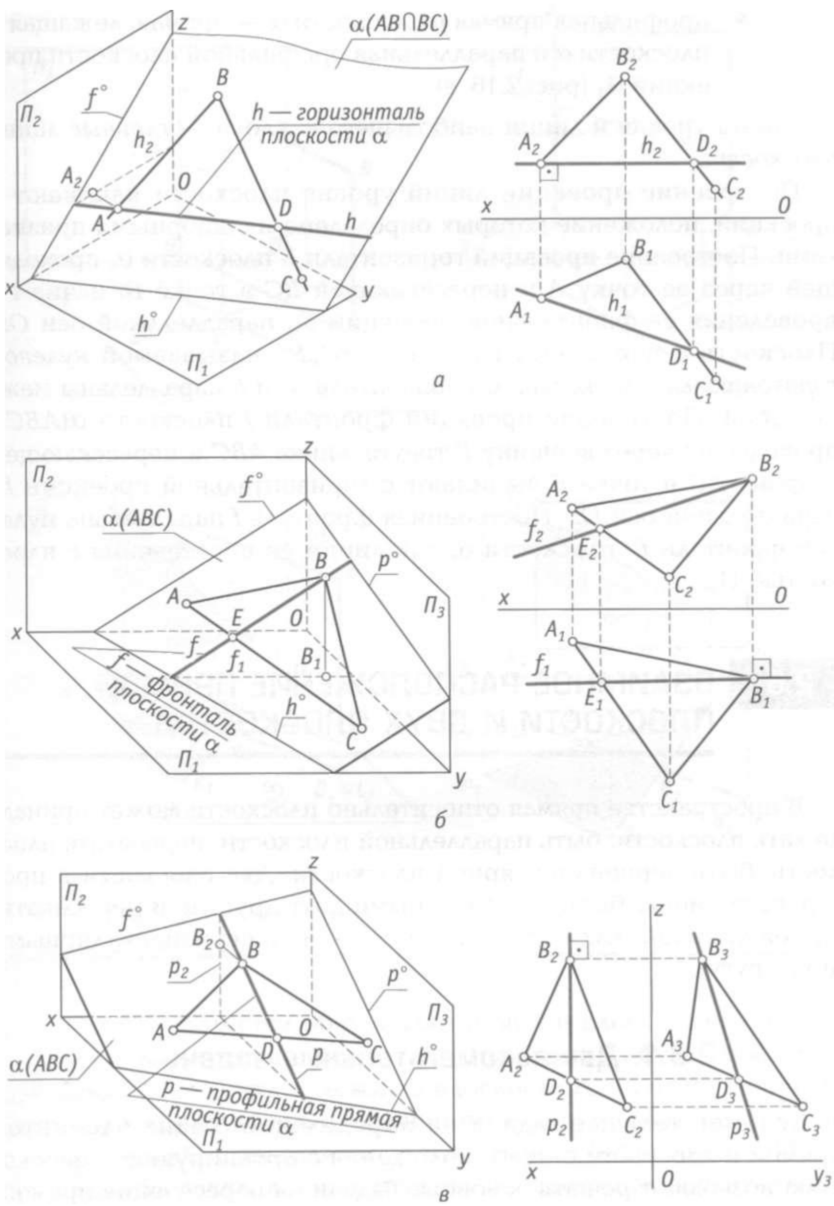


Рис. 2.16

фронталь f плоскости α —прямая плоскости α, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 2.16, б);

- профильная прямая р плоскости α — прямая, лежащая в плоскости α и параллельная профильной плоскости проекций Π_1 (рис. 2.16, в).

Линии уровня и линии наибольшего наклона — *главные линии плоскости.*

Построение проекций линий уровня плоскости начинают с проекций, положение которых определено их эпюрными признаками. Построение проекций горизонтали Л плоскости α, проходящей через ее точку A и пересекающей BC в точке Д начнем с проведения ее фронтальной проекции h_2, параллельной оси Ox. Плоскость α пересекает Π_1 по прямой h^0, называемой *нулевой горизонталью плоскости* α. Горизонтали h^0 и Л параллельны между собой. Построение проекций фронтали f плоскости $\alpha(ABC)$, проходящей через вершину B треугольника ABC и пересекающей сторону AC в точке E, начинают с горизонтальной проекции f_1, параллельной оси Ox. Построенная фронталь f параллельна нулевой фронтали f^0 плоскости а, как линии ее пересечения с плоскостью Π_2.

2.6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ И ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

В пространстве прямая относительно плоскости может принадлежать плоскости, быть параллельной плоскости, пересекать плоскость, быть перпендикулярной плоскости. Две плоскости в пространстве могут быть параллельными друг другу или пересекаться между собой (как частный случай — быть перпендикулярными друг другу).

2.6.1. Две вспомогательные задачи

Вспомогательные задачи на определение общих элементов прямой и плоскости общего положения с проецирующей плоскостью позволяют решать основные задачи на пересечение прямой, плоскости и двух плоскостей.

Вспомогательная задача 2.1. Построить проекции точки пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью. Заданы горизонтально-проецирующая плоскость а и прямая общего положения *1* (рис. 2.17, *а).* Точка *К* пересечения прямой *1* с

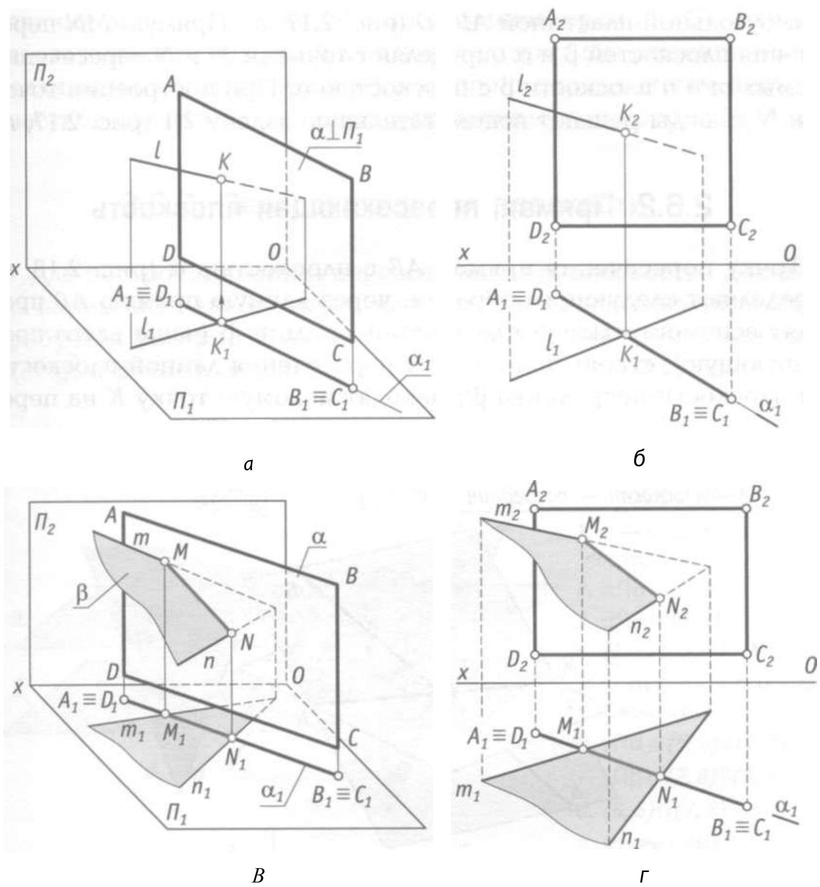


Рис. 2.17

плоскостью а является общей для прямой и плоскости. Поскольку точка *K* лежит на прямой *1,* то ее проекция K_1 будет лежать на проекции l_1. Но точка *K* лежит в плоскости α, поэтому ее проекция K_1 принадлежит вырожденной проекции α_1 плоскости α. Так как проекция K_1 принадлежит l_1 и α_1, то $K_1 = l_1 \cap \alpha_1$ (рис. 2.17, *б).* Проекция K_2 точки *K* находится на пересечении вертикальной линии связи, проведенной через точку K_1, с проекцией l_2 прямой *l*.

Вспомогательная задача 2.2. Построить проекции линии пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью. Плоскость общего положения β задана пересекающимися прямыми *m* и л, а горизонтально-проецирующая плоскость α —

сечении данной прямой AB с построенной прямой MN. Эту последовательность операций называют алгоритмом решения задачи. Реализация этого алгоритма на эпюре с определением видимых участков прямой на ее проекциях приведена на рис. 2.18, *б, в*.

2.6.3. Пересекающиеся плоскости

Для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно определить две ее точки или точку и ее направление. Пусть требуется построить линию MN пересечения двух плоскостей $\alpha(d \cap g)$ и $\beta(ABC)$, заданных в пространстве (рис. 2.19, *а*).

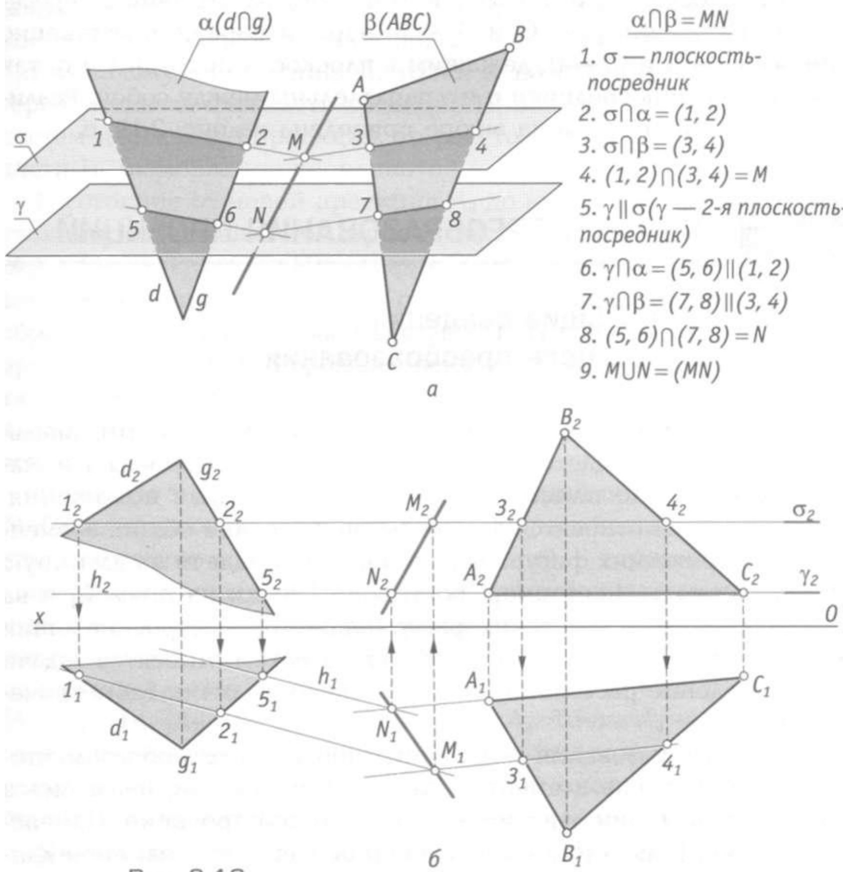


Рис. 2.19

Три плоскости пересекаются в одной точке. Чтобы определить две общие точки MN пересечения заданных плоскостей α и β, введем две вспомогательные плоскости σ и γ, называемые плоскостями-посредниками (плоскости частного положения — проецирующие или плоскости уровня). Первая плоскость-посредник — плоскость уровня σ — пересекает исходные плоскости α и β соответственно по линиям уровня *(1 — 2)* и *(3 — 4),* лежащим в плоскости-посреднике σ и пересекающимся в точке M. Точка M — общая для плоскостей α и β, поэтому принадлежит линии их пересечения.

Для определения второй точки N линии пересечения плоскостей α и β введем вторую плоскость-посредник γ, параллельную плоскости уровня σ. Плоскость σ пересечет плоскости α и β по линиям уровня (5 — 6) и (7 — 8), пересекающимся в точке N, общей для плоскостей α и β. Точки M и N определят линию пересечения MN. Линии (5— 6) и (7— 8) параллельны соответственно линиям (1—2) и (3 — 4), лежащим в плоскости-посреднике σ, так как плоскости-посредники σ и γ параллельны между собой. Реализация этого алгоритма на эпюре приведена на рис. 2.19, *б.*

2.7. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

2.7.1. Общие сведения и цель преобразования

Решение метрической или позиционной задач на ортогональном чертеже упрощается, если геометрические элементы занимают относительно плоскостей проекций частные положения. К *позиционным* относятся задачи на определение общих элементов геометрических фигур. Можно выделить задачи на взаимную принадлежность (например, построение точки на прямой) и на пересечение геометрических фигур (например, построение линии пересечения двух плоскостей). К *метрическим* относятся задачи на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур.

Цель преобразования — изменить чертеж таким образом, чтобы геометрические элементы (прямые и плоскости) оказались в частном положении относительно плоскостей проекций. Изменение проекций любой фигуры можно осуществить: заменой данной системы плоскостей проекций новой системой, так чтобы неподвижные геометрические элементы в пространстве оказались в частном положении относительно новой системы (способ замены плоскостей проекций); перемещением геометрических элементов в пространстве, так чтобы они оказались в частном положении относительно неподвижной системы плоскостей проекций (способ вращения).

2.7.2. Способ замены плоскостей проекций

Замена одной плоскости проекций. Точка А задана проекциями A_1 и A_2 (рис. 2.20, *а*). Введем взамен фронтальной плоскости проекций Π_2 старой системы Π_2/Π_1 новую вертикальную плоскость проекций $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Плоскость Π_4 с плоскостью Π_1 образуют новую ортогональную систему плоскостей проекций Π_4/Π_1. Плоскости Π_4 и Π_1 пересекутся по новой оси проекций $x_{1,4}$. Построим ортогональную проекцию A_4 точки *A* на плоскость Π_4. Так как горизонтальная плоскость проекций Π_1 общая для старой и новой систем плоскостей проекций, то расстояние от точки *A* до плоскости Π_1, измеряемое координатой z, неизменно.

Расстояние от новой проекции A_4 до новой оси $x_{1,4}$ равно расстоянию от заменяемой проекции A_2 до старой оси $x_{1,2}$, т.е. $|A_4A_{1,4}| = |A_2A_{1,2}| = z_A$. Не изменит своего положения и горизонтальная проекция A_1, связаная с неподвижной плоскостью Π_1. Для образования эпюра в новой системе Π_4/Π_1 плоскость Π_4 вместе с проекцией A_4 точки А вращают вокруг оси $x_{1,4}$ в направлении, показанном стрелками, до совмещения с плоскостью Π_1. Проекции A_4 и A_1 точки А будут расположены на общем перпендикуляре к оси $x_{1,4}$, т.е. $A_1A_4 \perp x_{1,4}$.

На эпюре точка А задана своими проекциями A_1 и A_2 (рис. 2.20, *б*). Проведем новую ось проекций $x_{1,4}$, определяющую в пространстве положение новой плоскости проекций — горизонтально-проецирующей плоскости Π_4. Проведем на произвольном расстоянии ось $x_{1,4}$ от точки A_1 (это расстояние может быть и нулевым). Через точку A_1 проведем перпендикуляр к оси $x_{1,4}$ и отметим на ней точку $A_{1,4}$. На перпендикуляре отложим от оси $x_{1,4}$ отрезок $|A_{1,4}A_4| = |A_{1,2}A_2| = z_A$ и получим точку A_4. Точка A_4 — новая проекция точки А на плоскость Π_4. Также можно заменить и горизонтальную плоскость проекций Π_1 старой системы Π_2/Π_1 новой плоскостью Π_5, перпендикулярной к незаменяемой плоскости Π_2.

Последовательная замена двух плоскостей проекции. Решение некоторых задач требует двойной замены плоскостей проек-

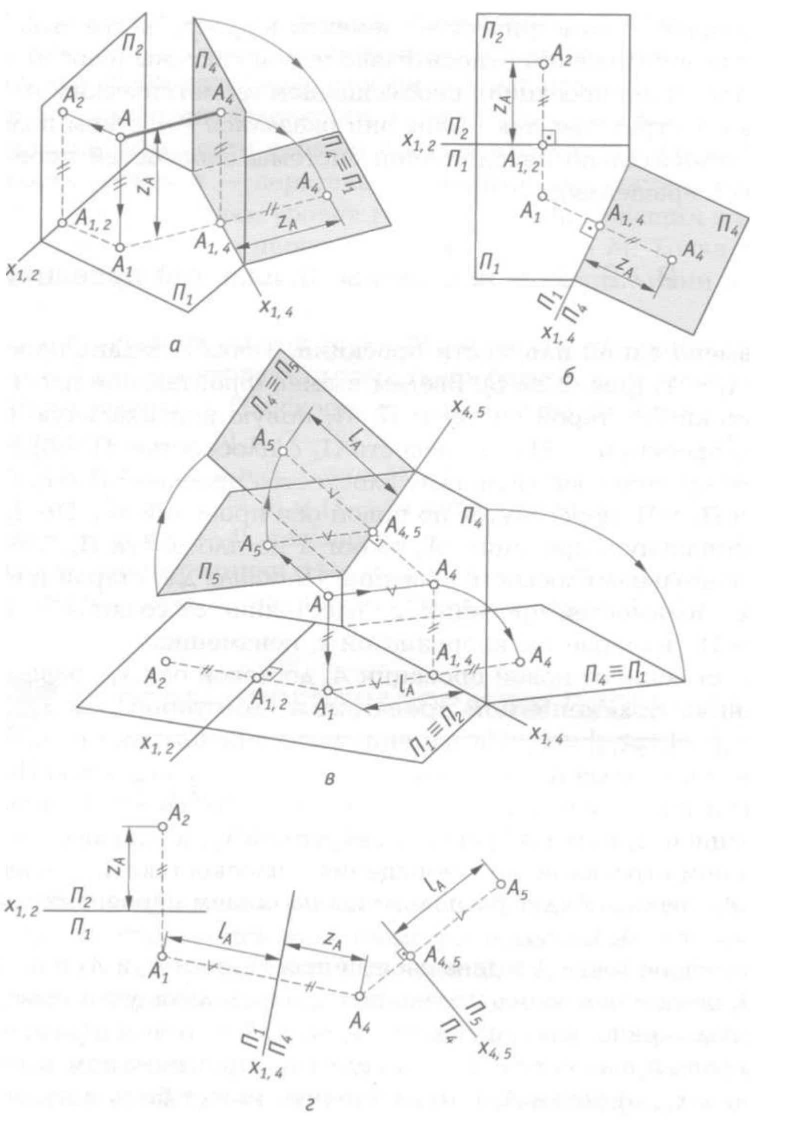


РИС. 2.20

ций. На совмещенных плоскостях проекций Π_2 и Π_1 исходной системы Π_2/Π_1 построены проекции A_1 и A_2 точки *A* (рис. 2.20, *в*) и показана новая плоскость Π_4, выбранная взамен фронтальной плоскости проекций Π_2. На ней построена проекция A_4 точки *A*.

Выберем вместо горизонтальной плоскости проекций Π_1 старой системы Π_4/Π_1 новую плоскос Π_5 и расположим ее перпендикулярно к плоскости Π_4, образовав новую систему плоскостей проекций Π_4/Π_5. Построим проекцию A_5 точки A на плоскость Π_5 Поскольку плоскость Π_4 является общей для систем Π_4/Π_1 и Π_4/Π_5, то расстояние от точки А до плоскости Π_4, измеряемое отрезком AA_4, неизменно.

Расстояние от новой проекции A_5 до новой оси $x_{4,5}$ равно расстоянию от заменяемой проекции A_1 до старой оси $x_{1,4}$, т.е. $|A_5A_{4,5}| = |A_1A_{1,4}|$. Для образования эпюра плоскость Π_5 вращаем вокруг оси $x_{4,5}$ в направлении, указанном стрелкой, до совмещения с плоскостью чертежа. На эпюре (рис. 2.20, г) проекции A_5 и A_4 связаны линией связи, перпендикулярной оси $x_{4,5}$. Расстояние от точки A_5 до оси $x_{4,5}$ равно расстоянию от точки A_1 до оси $x_{1,4}$, обозначенному l_A. Переход от одной системы плоскостей проекций к другой осуществляем по правилу: расстояние от новой проекции точки до новой оси равно расстоянию от заменяемой проекции точки до предыдущей оси. При первой замене системы Π_2/Π_1 на Π_4/Π_1 для оси $x_{1,4}$ предыдущей была ось $x_{1,2}$, а при переходе от системы Π_4/Π_1 к Π_4/Π_5 новой осью ста $x_{4,5}$, а ось $x_{1,4}$ по отношению к ней стала предыдущей.

2.7.3. Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций

Прямая и плоскость могут занимать в пространстве по два частных положения относительно плоскостей проекций. Решение любых метрических или позиционных задач можно свести к решению одной из четырех основных задач, решаемых способом замены плоскостей проекций.

Задача **2**.1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала параллельной новой плоскости проекций. Прямая *AB,* заданная в системе плоскостей проекций Π_2/Π_1, — общего положения (рис. 2.21, *а).* Расположим новую плоскость проекций $\Pi_4 \perp \Pi_1$ параллельно прямой *AB.* Ее проекция A_1B_1 параллельна новой оси $x_{1,4}$. На плоскость Π_4 спроецируются без искажения длина отрезка *[AB]* и угол φ наклона прямой *AB* к плоскости Π_1. Эпюрное решение задачи с определением натуральной величины отрезка *[AB]* и угла наклона φ прямой *AB* к плоскости Π_1 приведено на рис. 2.21, *б.*

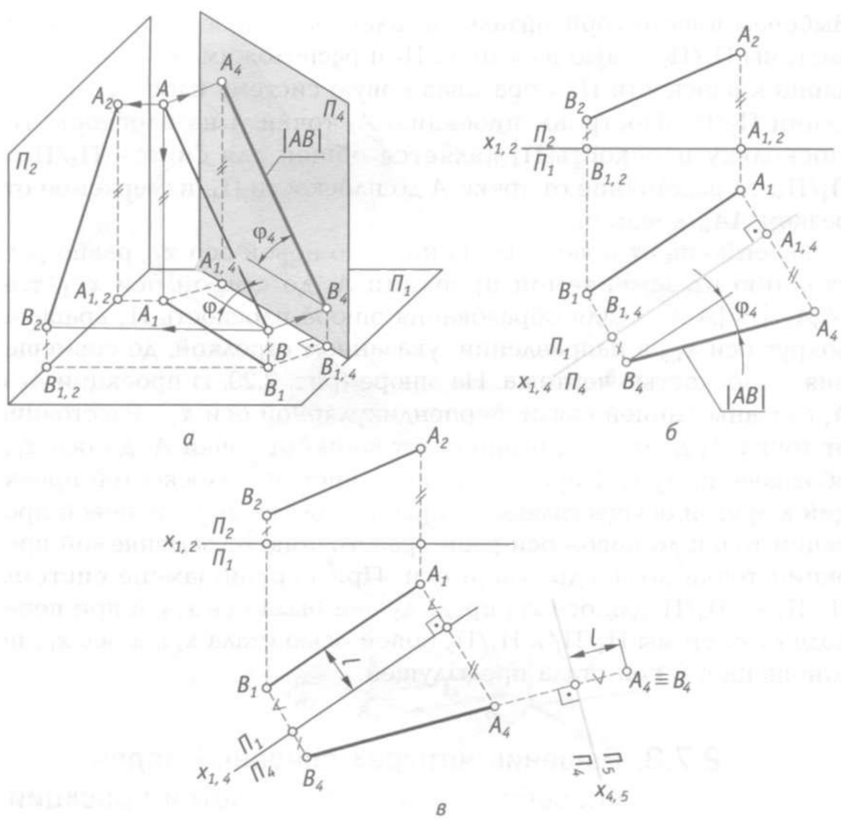
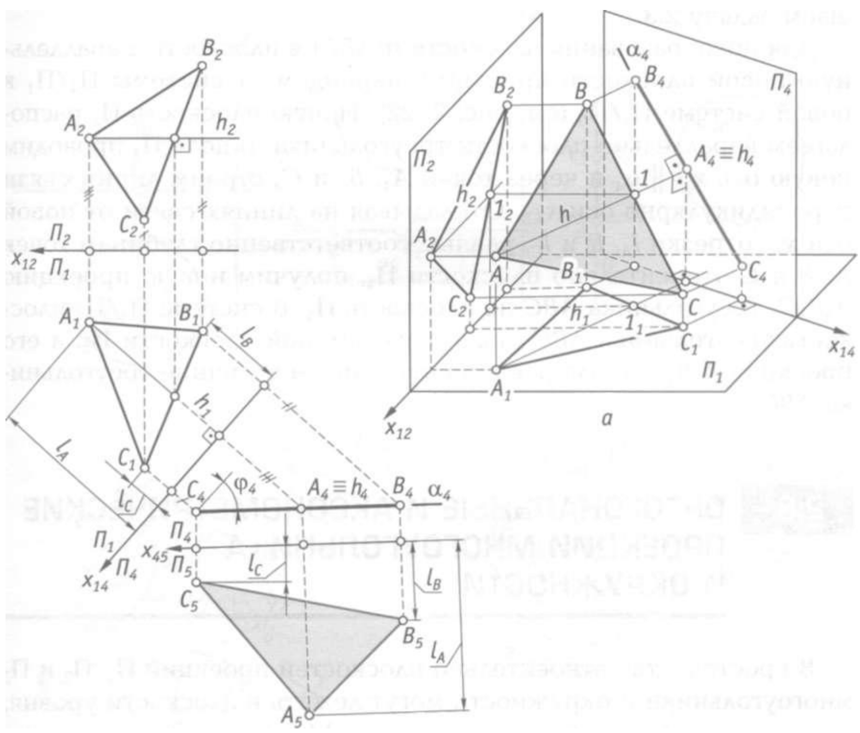


Рис. 2.21

Задача 2.2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала перпендикулярной одной из плоскостей проекций. Любая новая плоскость проекций, выбранная перпендикулярно прямой AB общего положения, в системе Π_2/Π_1 не будет ортогональна Π_2 и Π_1 и не может быть принята за плоскость проекций. Поэтому задачу решают путем последовательной замены двух плоскостей проекций (рис. 2.21, в). Заменяем систему Π_2/Π_1 системой Π_4/Π_1 и решаем задачу 2.1. Затем при переходе от системы Π_4/Π_1 к системе Π_4/Π_5 новую плоскость проекций Π_5 располагаем перпендикулярно прямой AB и Π_4, обеспечивая условие ортогональности плоскостей проекций Π_5 и Π_4. Новая ось $x_{4,5}$ проведена перпендикулярно A_4B_4. Отложив на линии связи от новой оси $x_{4,5}$ отрезок 7, равный глубине точек прямой AB относительно плоскости $П_4$, получим вырожденную проекцию A_5B_5 прямой AB на плоскость $П_5$ в виде точки $A_5 = B_5$.

Задача 2.3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала перпендикулярной новой плоскости проекций. Новую плоскость проекций $П_4$ расположим перпендикулярно треугольнику ABC (плоскости общего положения а) и одной из плоскостей проекций (рис. 2.22, а). Плоскость а должна содержать прямую, перпендикулярную $П_4$, например горизонталь л. Расположим новую плоскость проекций $П_4$ перпендикулярно горизонтали л, а это значит, что $П_4$ перпендикулярна и плоскости П), обеспечивая условия ортогональности плоскостей проекций $П_4$ и П^



б

Рис. 2.22

Горизонталь л и плоскость $\alpha(ABC)$ перпендикулярны новой плоскости проекций Π_4. На плоскости Π_4 новые проекции A_4, B_4, C_4 — вершины треугольника, расположенные на прямой — новой вырожденной проекции α_4. Эпюрное решение задачи с определением утла наклона φ плоскости α к плоскости Π_1 приведено на рис. 2.22, *б*.

Задача **2**.4. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала параллельной одной из плоскостей проекций. Решать эту задачу заменой одной плоскости проекций невозможно, поскольку новая плоскость проекций, параллельная плоскости α общего положения (треугольнику *ABC)*, не образует с плоскостями проекций Π_1 и Π_2 ортогональной системы. Необходимо сделать две последовательные замены плоскостей проекций. Первой заменой переходим от системы Π_2/Π_1 к новой системе Π_4/Π_1 и преобразуем плоскость треугольника α в плоскость, перпендикулярную Π_4, т. е. решаем задачу 2.3.

Для преобразования плоскости $\alpha(ABC)$ в плоскость, параллельную новой плоскости проекций, перейдем от системы Π_4/Π_1 к новой системе Π_4/Π_5 (см. рис. 2. 22). Новую плоскость Π_5 располагаем параллельно плоскости треугольника. В поле Π_4 проводим новую ось $x_{4,5} \parallel \alpha_4$ и через т о A_4, B_4 и C_4 строим линии связи перпендикулярно оси $x_{4,5}$. Откладывая на линиях связи от новой оси $x_{4,5}$ отрезки l_A, l_B и l_C, равные соответственно глубинам точек *A, B и C* относительно плоскости Π_4, получим новую проекцию $A_5B_5C_5$ треугольника *ABC* на плоскость Π_5. В системе Π_4/Π_5 плоскость треугольника *ABC* стала параллельной плоскости Π_5, а его проекция $A_5B_5C_5$ стала равной натуральной величине треугольника *ABC.*

2.8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА И ОКРУЖНОСТИ

В пространстве относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2 и Π_3 многоугольники и окружности могут лежать в плоскости уровня, проецирующей или общего положения. Многоугольник называется плоским, если его вершины лежат в плоскости. Многоугольник как плоскую фигуру на чертеже задают проекциями его вершин (рис. 2.23, *а*). Аксонометрические проекции многоугольников строят по координатам их вершин; отрезки, параллельные между собой, изображают параллельными отрезками; длина аксонометрической проекции стороны многоугольника, расположенной параллельно аксонометрической оси, равна своей натуральной дли-

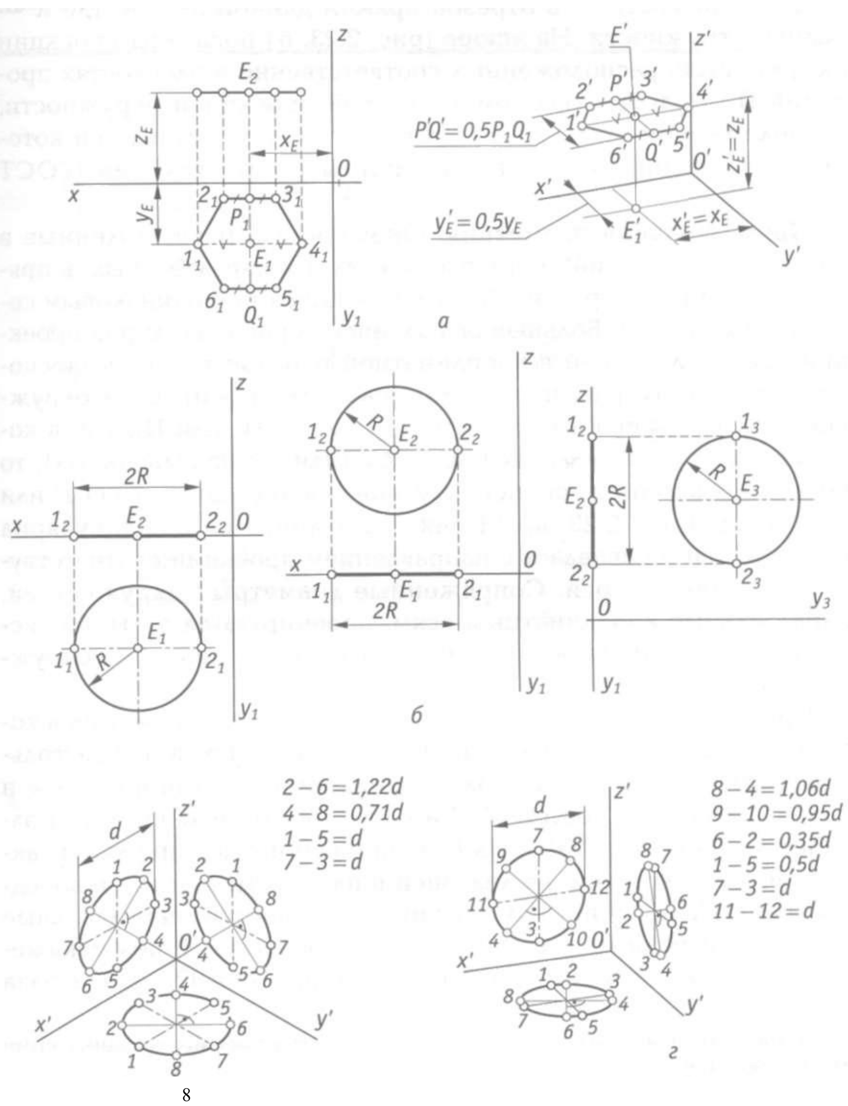


Рис. 2.23

не, умноженной на коэффициент искажения по этой оси (см. подразд. 2.3). Построение прямоугольной диметрии правильного плоского шестиугольника, расположенного параллельно горизонтальной плоскости Π_1, представлено на рис. 2.23, *а*.

Окружности, лежащие в плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируются на эту плоскость в окружность, а на другую плоскость — в отрезок прямой длиной $2R = d$, где R — радиус окружности. На эпюре (рис. 2.23, *б)* показаны проекции окружностей, расположенных соответственно в плоскостях проекций Π_1, Π_2 и Π_3. Аксонометрической проекцией окружности, расположенной в плоскости уровня, является эллипс, оси которого имеют определенные величины и направления (ГОСТ 2.317 — 69).

Прямоугольная изометрия. Окружности, расположенные в плоскостях проекций* или в плоскостях, им параллельных, в прямоугольной изометрии изображают эллипсами с одинаковым соотношением осей. Большая ось эллипса перпендикулярна проекции оси, не лежащей в координатной плоскости, т.е. в плоскости окружности (так называемой свободной оси). Если окружность расположена в плоскостях проекций Π_1 или Π_2, т. е. в координатных плоскостях *xOy* или *xOz* (или им параллельных), то большая ось эллипса перпендикулярна свободным осям $O'z'$ или $O'y'$ и т.д. (рис. 2.23, в). Малая ось эллипса перпендикулярна большой оси и совпадает с направлением проекции соответствующей свободной оси. Сопряженные диаметры** окружностей, параллельные координатным осям, проецируются на Π' без искажения. Величины осей эллипсов зависят от диаметра окружности *d*.

Прямоугольная диметрия. Окружности, лежащие в плоскостях проекций или плоскостях, им параллельных, в прямоугольной диметрии изображают эллипсами, одинаковыми по форме и размерам для плоскостей xOy' и $y'O'z'$, но отличающиеся от эллипса в плоскости $x'O'z'$. Их большие оси перпендикулярны аксонометрической оси, не лежащей в плоскости эллипса (свободной оси). Сопряженные диаметры окружностей, параллельные координатным осям *Ox* и *Oz,* проецируются на Π' без искажения, а проекции диаметров, параллельные оси *Oy,* в два раза

* Плоскости проекций Π_1, Π_2 и Π_3 совмещены соответственно с координатными плоскостями *xOy, xOz* и *yOz.*

** Два взаимно перпендикулярных диаметра окружности, каждый их которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются сопряженными.

меныпе, так как коэффициент искажения V по оси $O'y'$ равен 0,5. Величины осей эллипсов зависят от диаметра окружности d (рис. 2.23, г).

Построение прямоугольной изометрии окружности, расположенной в плоскости проекций П, приведено на рис. 2.24, а, а расположенной в плоскости а // $П_2$ — на рис. 2.24, *б*. Прямоугольная диметрия окружности, расположенной в плоскостях проек-

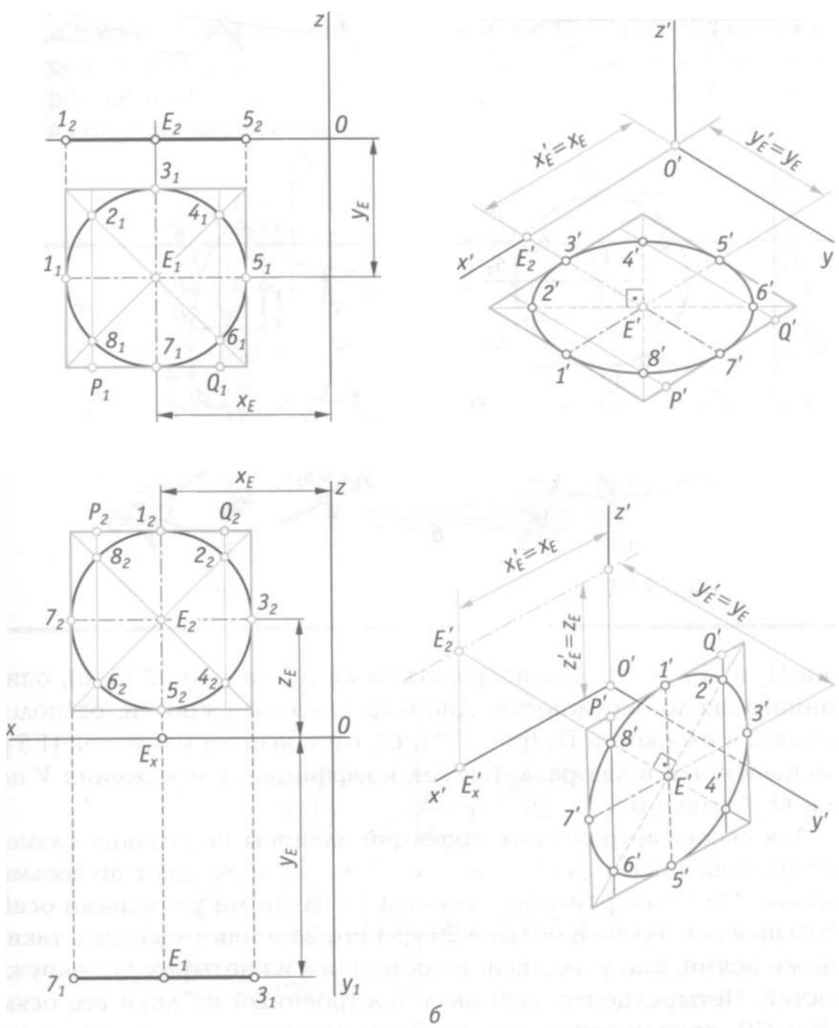


Рис. 2.24

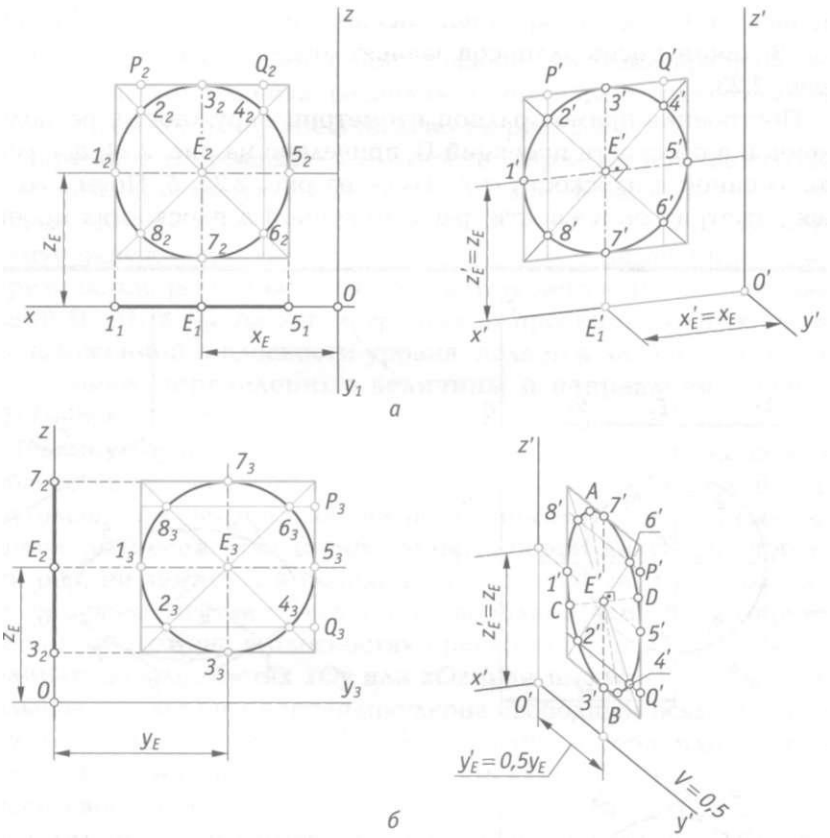


Рис. 2.25

ций Π_2 и Π_3, построена посредством квадрата (рис. 2.25, *а),* описанного около окружности. Диаметр *1 — 5* окружности, расположенной в плоскости Π_3 (рис. 2.25, *б),* отобразится в отрезок $[1'5']$, уменьшенный в два раза, так как коэффициент искажения *V* по оси $O'y'$ равен 0,5.

Для аксонометрических проекций эллипсы небольших размеров (большая ось эллипса меньше 20 мм) вычерчивают по восьми точкам. При вычерчивании эллипса с большими размерами осей (большая ось эллипса больше 20 мм) его заменяют овалом с такими же осями, как у эллипса, и состоящим из четырех дуг окружностей. Четырехцентровый овал, построенный по двум его осям *AB* и *CD,* приближенно заменяет аксонометрическую проекцию окружности (рис. 2.26, *а).*

Пусть AB — большая ось эллипса, CD — его малая ось. Построение овала с осями, равными осям эллипса, производится дугами окружностей из центров O^1, O^2, O^3, O^4. Для нахождения центров O^1 и O^2 на малой оси откладывают отрезок $|OE| = |OA|$, т.е. длину большой полуоси. На прямой AC от точки С откладывают разность полуосей — отрезок $|CE^1| = |CE|$. Через середину отрезка $[AE^1]$ — точку T — проводят перпендикуляр, пересечение которого с данными осями определяет центры O^1 и O^2, Два других центра O^3 и O^4 находят как точки, симметричные соответственно O^1 и O^2 относительно центра O. Дуги KAM и LBN проводят из центров O^1 и O^3 радиусом $r = |O^1A| = |O^3B|$: дуги KCL и MDN — из центров O^2 и O^4 радиусом $R = |O^2C| = |O^4D|$. Точки K, I, M, N — точки сопряжения дуг овала.

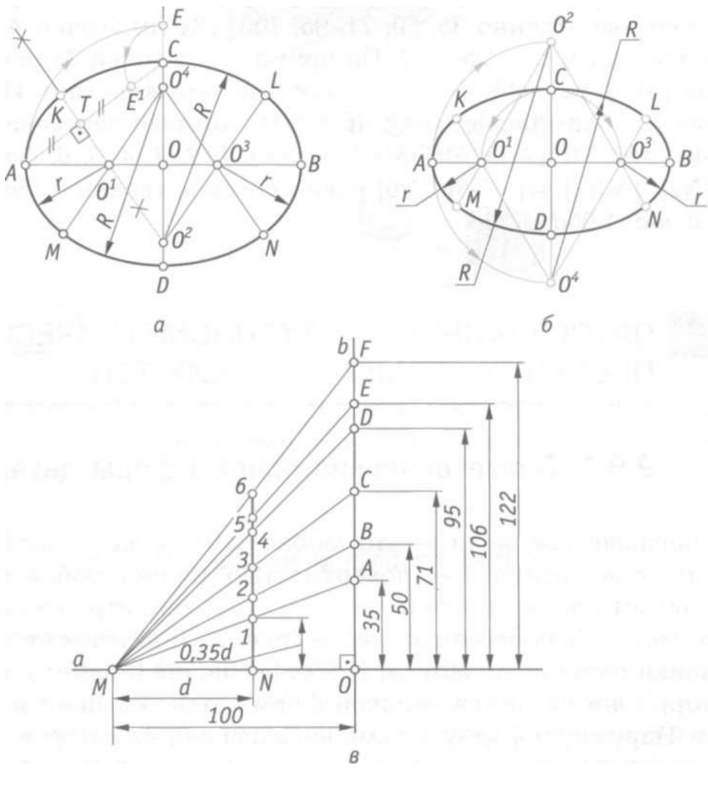


Рис. 2.26

При аналогичных построениях овала, заменяющего эллипс в прямоугольной изометрии, центры O^1 и O^2 дуг окружностей удалены от центра овала на расстояния, равные соответственно малой и большой полуосям овала, т. е. $|OO^1| = |OC|$, а $|OO^2| = |OA|$. Из точки O описывают две полуокружности радиусами, равными полуосям OC и OA овала (рис. 2.26, *б).* На пересечении полуокружностей с осями AB и CD получают пары точек O^1, O^3 и O^2, O^4 — центры сопряженных дуг окружностей, из которых состоит овал.

Для исключения арифметических действий по определению величин осей эллипсов воспользуемся диаграммой графического умножения диаметра окружности на соответствующие коэффициенты искажения осей эллипса, применяемые в стандартных видах аксонометрических проекций. Для этого построим взаимно перпендикулярные прямые *а* и Ъ, пересекающиеся в точке O (рис. 2.26, в).

На прямой *а* от точки O отложим отрезок [OM], равный 100 мм; на другой — отрезки *[OA], [OB], [OC], [OD], [OE], [OF],* равные соответственно 35, 50, 71, 95, 106, 122 мм. Точки *A, B, C, D, E, F* соединим с точкой М. На прямой *а* от точки М отложим отрезок *[MN],* равный по длине диаметру окружности d. Из точки *N* восстановим перпендикуляр к *OM,* который пересечет прямые МА, *MB,* МС, *MD, ME, MF* в точках *1,2,3, 4, 5, 6.* Отрезки $[N1]$, $[N2]$, $[N3]$, $[N4]$, $[N5]$, $[N6]$ равны соответственно 0,35d; 0,5d; 0,71d; 0,95d; 1,06d; 1,22d.

2.9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

2.9.1. Геометрические основы форм деталей

Геометрическое тело — это любая замкнутая область пространства с ее границей — поверхностью. Форма любой детали представляет собой сочетание простейших геометрических тел или их частей. К простейшим телам (рис. 2.27, *а)* относятся многогранники (призма, пирамида) и тела вращения (цилиндр, конус, шар, тор). Они являются основой форм деталей машин и механизмов. Наружную форму детали, внешняя форма которой состоит из простейших геометрических тел и их частей (рис. 2.27, б), можно представить как объединение прямых призм *1,2,* 7 и по-

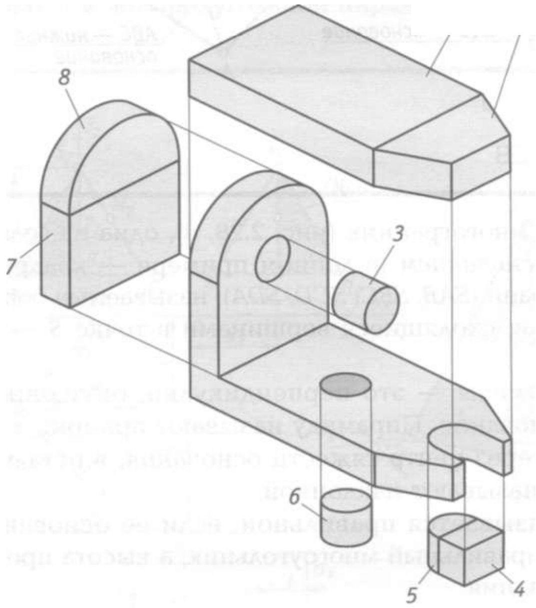


Рис. 2.27

луцилиндра *8.* Внутренние полости детали получены удалением из общего объема детали прямой призмы *4,* полуцилиндра *5* и двух цилиндров *3* и *6.*

2.9.2. Проекции многогранников

Общие положения. *Многогранником* называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Многоугольники, из которых состоит многогранник, называются *гранями,* их смежные стороны — *ребрами,* а общие вершины — *вершинами многогранника.* Совокупность вершин и ребер многогранника называют его *сеткой.*

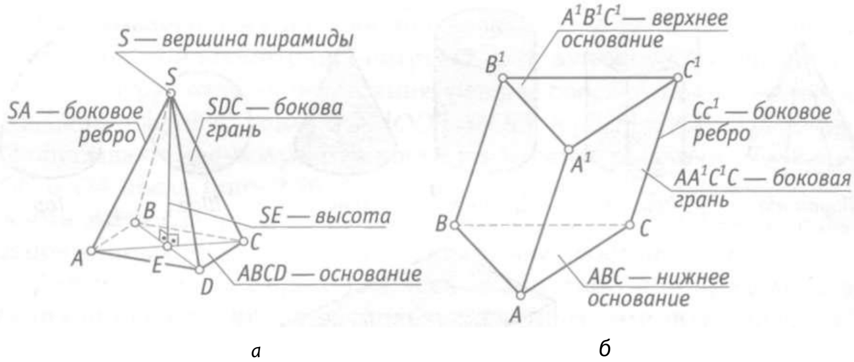


Рис. 2.28

Пирамида — многогранник (рис. 2.28, а), одна из граней которого является *основанием* (в данном примере — квадрат *ABCD);* все остальные грани *(SAB, SBC, SCD, SDA),* называемые боковыми — это треугольники, сходящиеся вершинами в точке *S* — вершине пирамиды.

Высота пирамиды — это перпендикуляр, опущенный из ее вершины на основание. Пирамиду называют прямой, если ее высота проходит через центр тяжести основания, в остальных случаях пирамиду называют наклонной.

Пирамида называется правильной, если ее основание представляет собой правильный многоугольник, а высота проходит через центр основания.

Призма — многогранник, две противоположные грани которого, являющиеся основаниями, представляют собой равные многоугольники с параллельными сторонами, а остальные грани, называемые боковыми, — параллелограммы (рис. 2.28, *б).* Противоположные стороны AA^1, BB^1 и CC^1 параллелограммов называют боковыми ребрами призмы.

Призму называют прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания, в остальных случаях призму называют наклонной. Прямую призму называют правильной, если ее основания представляют собой равные правильные многоугольники, а боковые грани — равные прямоугольники. Призму называют параллелепипедом, если ее основания — параллелограммы. Если шесть граней призмы — прямоугольники, то призму называют прямоугольным параллелепипедом. Призму и пирамиду называют треугольными, четырехугольными (и т.д.), если в основании лежит треугольник, четырехугольник (и т.д.).

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. *Выпуклым* называют многогранник, тело которого расположено по одну сторону от плоскости любой его грани (см. рис. 2.28).

Проекции пирамиды и призмы. На чертеже многогранник задают проекциями своей сетки, т. е. проекциями ребер и вершин. Если точка лежит на поверхности многогранника, то она располагается на его ребре или грани. Построение ортогональных проекций правильной четырехугольной пирамиды *SABCD* (рис. 2.29, а),

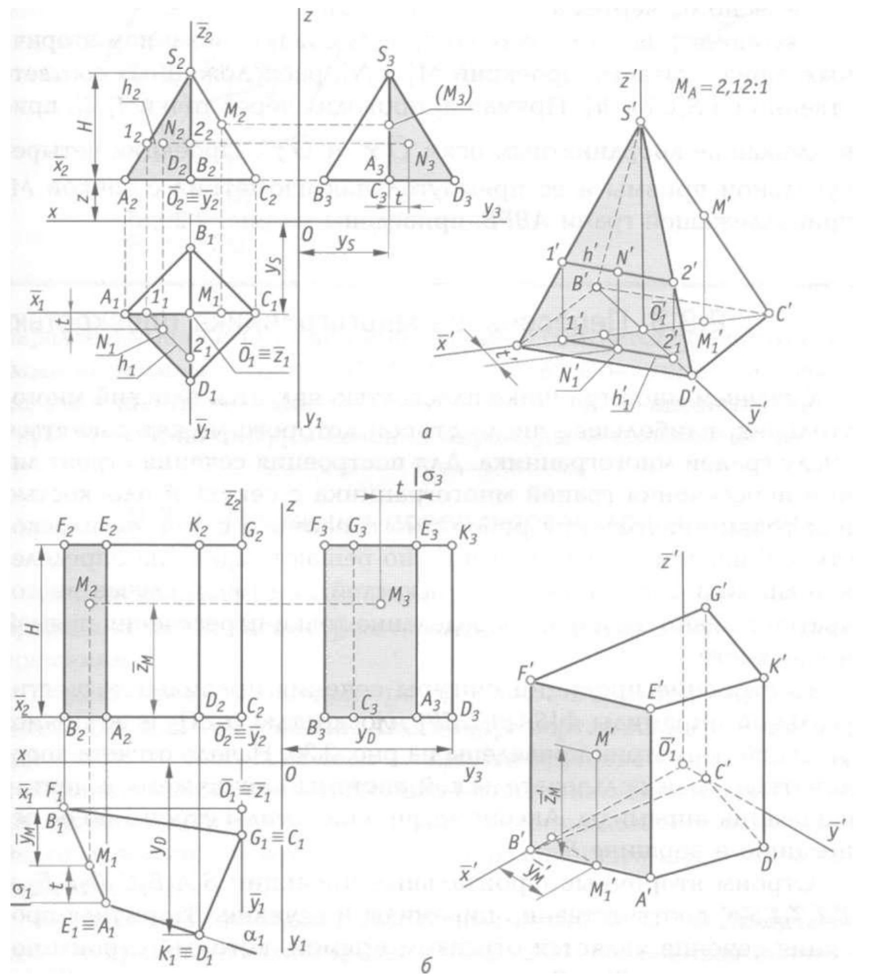


Рис. 2.29

основание которой параллельно плоскости проекций Π_1, начинают с изображения на Π_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ — горизонтальной проекции основания пирамиды.

Фронтальной и профильной проекциями основания пирамиды будут отрезки A_2C_2 и B_3D_3, параллельные соответственно осям Ox и Oy и удаленные от них на расстоянии z. По горизонтальной проекции S_1 вершины пирамиды и ее высоте строят проекции S_2 и S_3, а также проекции пирамиды на Π_2 и Π_3. Построение недостающих проекций M_1 точки M, принадлежащей ребру SC пирамиды, и проекции N_2 точки N, расположенной на грани SAD пирамиды, ясно из чертежа (см. рис. 2.29, *а*).

Аксонометрия этих точек построена с использованием вторичных горизонтальных проекций M'_1 и N'_1, расположенных соответственно на $S'_1C'_1$ и h'_1. Прямая h'_1 проходит через точки $1'_1$ $2'_1$, принадлежащие координатным осям $\bar{O}'\bar{x}'$ и $\bar{O}'\bar{y}'$. Проекции четырехугольной призмы и ее прямоугольная изометрия с точкой M, принадлежащей грани $ABFE$, приведены на рис. 2.29, *б*.

2.9.3. Пересечение многогранника плоскостью

Сечением многогранника плоскостью является плоский многоугольник, наибольшее число сторон которого может равняться числу граней многогранника. Для построения сечения строят линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью или точки пересечения ребер многогранника с той же плоскостью. В первом случае многократно решают задачу на определение линии пересечения двух плоскостей, во втором случае многократно решают задачу на определение точки пересечения прямой и плоскости.

Построение проекции фигуры сечения правильной шестиугольной пирамиды <£>[SABCDEF] плоскостью $\alpha \perp \Pi_2$ и ее прямоугольной изометрии приведены на рис. 2.30. Начало отсчета координатных осей пользовательской системы «привяжем» к центру основания пирамиды. Аксонометрию пирамиды строим по ее основанию и вершине *S*.

Строим вторичные фронтальные проекции *S^A^B^C^D^E^Fj* и $1'_2 2'_2 3'_2 4'_2 5'_2 6'_2$ соответственно пирамиды и сечения. Вторичная проекция сечения является отрезком прямой, ко средством точек P' и Q', лежащих соответственно на осях $O'x'$ и $O'z'$. Из точек вторичной проекции сечения проводим прямые,

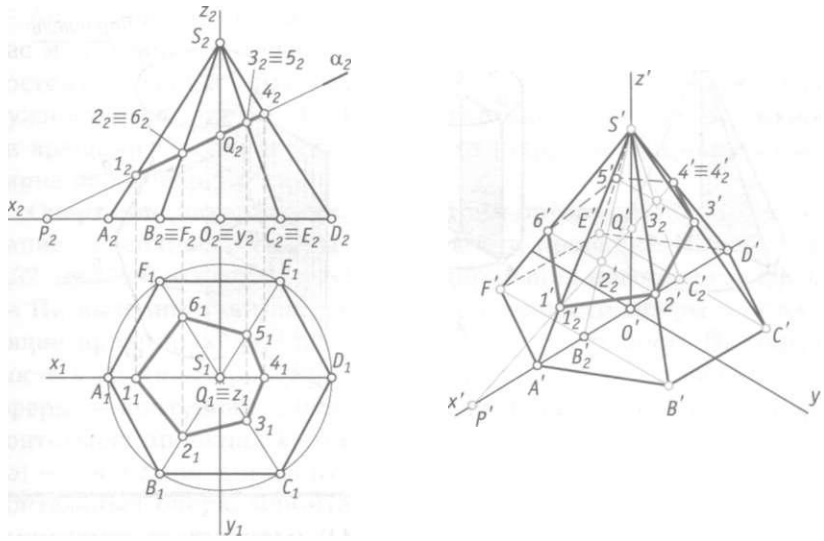


Рис. 2.30

параллельные оси $O'y'$, до пересечения с соответствующими ребрами пирамиды в точках $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$. Соединив эти точки, получим шестиугольник $1'—2'—3'—4'—5'—6'$ — аксонометрическую проекцию фигуры сечения пирамиды Ф плоскостью α.

2.9.4. Проекции поверхностей тел вращения

Общие положения. Тела вращения являются составной частью круглых деталей. Рассмотрим некоторые понятия о поверхностях вращения.

Заданы прямоугольный треугольник *ABC* и прямоугольник *ABCD.* Вращая треугольник *ABC* вокруг вертикального катета *BC* (рис. 2.31, *а),* получаем тело — *прямой круговой конус.* Боковая поверхность этого тела образована вращением гипотенузы *AB,* а его полная поверхность получена добавлением к боковой поверхности основания конуса — круга, образованного вращением катета *AC.*

Вращая прямоугольник *ABCD* вокруг стороны *CD,* получаем тело — *прямой круговой цилиндр* (рис. 2.31, *б).* Боковая поверхность этого тела образована вращением стороны *AB,* а полная поверхность состоит из его боковой поверхности и двух кругов, об-

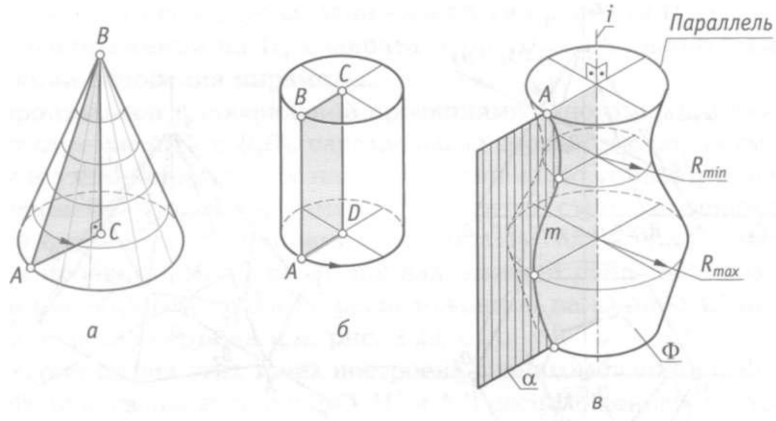


Рис. 2.31

разованных вращением сторон *BC* и АД называемых основаниями цилиндра. Отрезок *AB* называют производящим (образующим) элементом этих поверхностей, а прямые *BC* и *CD* — их осями вращения.

Основные понятия. Вращая кривую линию яг, лежащую в плоскости α (рис. 2.31, в), вокруг прямой i — оси вращения, получаем поверхность вращения Ф. Любая точка, например А, производящей линии яг, вращаясь вокруг оси i, образует окружность — параллель поверхности. Плоскость параллели перпендикулярна оси вращения. Параллель минимального радиуса — горловина поверхности; параллель максимального радиуса — экватор поверхности.

Множество линий поверхности, заполняющих ее так, что через каждую точку поверхности проходит одна линия этого множества, называется *каркасом поверхности.* Если это множество непрерывно, то каркас непрерывный, в других случаях — дискретный, т.е. содержащий конечное число линий каркаса. На поверхности вращения можно построить множество параллелей, образующих ее непрерывный каркас, заполняющий всю поверхность.

Кривая, полученная при пересечении поверхности вращения с осевой плоскостью, — *меридиан* поверхности Ф. Если плоскость меридиана параллельна плоскости проекций, то меридиан называется главным. Меридианы равны между собой и симметричны относительно оси поверхности. На поверхности вращения можно построить множество меридианов, заполняющих ее и образующих ее непрерывный каркас.

Два семейства линий поверхности — каркас параллелей и каркас меридианов — *сеть поверхности.* Сеть поверхности конуса состоит из каркаса прямых (образующих конуса) и каркаса окружностей (см. рис. 2.31, *а).* Отличительный признак поверхности вращения — плоскость параллели (окружности) перпендикулярна оси поверхности.

Очертание поверхности. Рассмотрим ортогональное проецирование поверхности сферы на плоскости проекций Π_1 и Π_2 (рис. 2.32, *а).* Из множества лучей, проецирующих поверхность сферы на П], выделим лучи, касающиеся поверхности сферы и образующие проецирующую цилиндрическую поверхность Ω. Окружность *к* касания проецирующей поверхности Ω с поверхностью сферы — контурная линия, являющаяся экватором сферы. Горизонтальная проекция k_1 контурной линии *к* (окружности экватора) — очертание горизонтальной проекции сферы, или ее горизонтальный очерк. Фронтальная проекция $к_2$ контурной линии *к* — линия видимости для горизонтальной проекции сферы, так как линия *к* — экватор сферы при ее проецировании на Π_1 делит сферу на две части: верхнюю видимую и нижнюю невидимую.

Контурную линию — окружность главного меридиана *m* — проецируют на $П_2$ в очертание фронтальной проекции сферы,

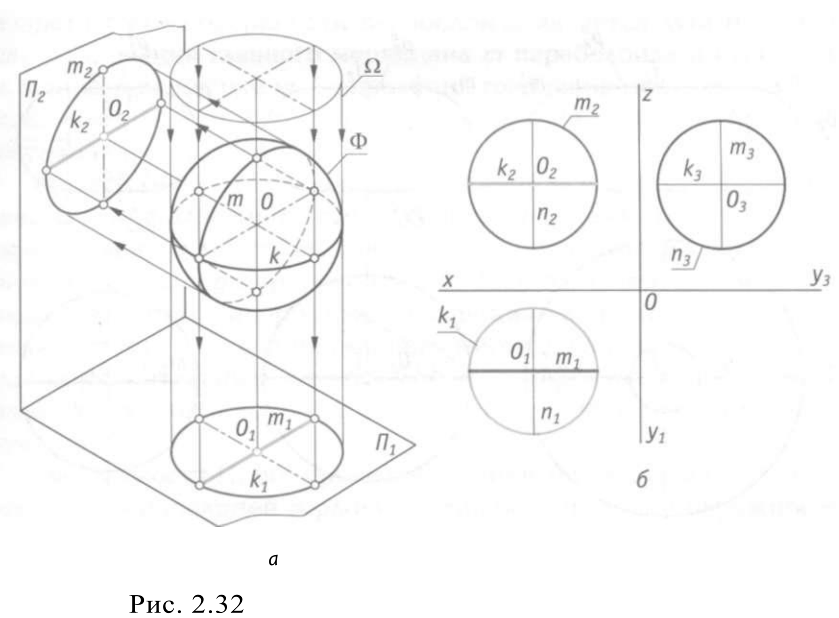


Рис. 2.32

или в ее фронтальный очерк. Горизонтальная проекция m_1 линии *т* (окружность главного меридиана) — линия видимости для фронтальной проекции сферы. На ортогональном чертеже поверхности вращения задают их очертаниями. Очертаниями сферы на плоскостях $П_1$, $П_2$ и $П_3$ являются окружности k_1, m_2 и n_3 (рис. 2.32, *б).* На другие плоскости окружности *к, т* и л проецируются в линии видимости $к_2$ и $к_3$, m_1 и $яг_3$, n_1 и $л_2$ для проекций сферы соответственно на $П_1$, $П_2$ и $П_3$.

Проекции тора. Поверхность тора образуют вращением окружности вокруг оси, расположенной в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Если производящая окружность яг не пересекает ось вращения i, то образованная ею поверхность называется *открытым* тором, или *кольцом* (рис. 2.33, *а).* Если производящая окружность *т* касается (рис. 2.33, *б)* оси вращения i или пересекает ее (рис. 2.33, *в)* в двух точках А и В (производящей линией будет большая дуга окружности), тор называется *закрытым.* Окружность, по которой вращается центр *О* производящей окружности *т,* называется линией центров. Главным меридианом тора являются две окружности *т* и яг', принадлежащие осевой плоскости $\alpha \parallel П_2$ и расположенные симметрично относительно оси вращения.

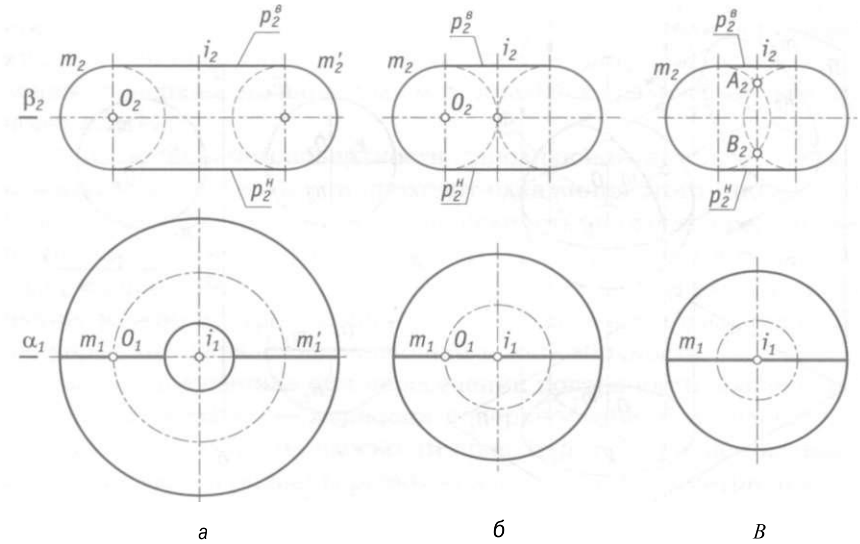


Рис. 2.33

2.9.5. Проекции поверхностей вращения второго порядка

Порядок плоской кривой линии графически определяют количеством точек ее пересечения с секущей прямой. Если секущая прямая l пересекает плоскую кривую *т* в четырех точках, то кривая *т* — четвертого порядка; если в двух точках, то линия *т* — кривая второго порядка. Вращением кривой второго порядка вокруг собственной оси или оси, лежащей в плоскости симметрии кривой, получают поверхность вращения второго порядка.

Поверхность сферы образуется вращением окружности вокруг ее диаметра. Очерк горизонтальной проекции сферы — это окружность — проекция экватора сферы, а очерк ее фронтальной проекции — тоже окружность — проекция главного меридиана сферы (см. рис. 2.32, *б).*

Вращая эллипс *т* вокруг его большой оси *АВ,* получаем *поверхность вытянутого эллипсоида вращения* (рис. 2.34, *а),* вращая вокруг малой оси *CD, — поверхность сжатого эллипсоида вращения.* Горизонтальный очерк вытянутого эллипсоида — окружность p_1 (проекция экватора), а фронтальный очерк — эллипс $т_2$ (проекция главного меридиана *т).*

Поверхность параболоида вращения образуется вращением параболы вокруг ее оси i (рис. 2.34, *б).* Очерком фронтальной проекции отсека поверхности параболоида является дута параболы Я1_2 — проекция главного меридиана *т* параболоида и отрезок $к_2$ с концами на очерке $т_2$ — проекция граничной окружности *к* отсека поверхности. Горизонтальная проекция отсека параболоида ограничена окружностью k_1

Вращая гиперболу яг вокруг ее мнимой оси i, получаем *поверхность однополостного гиперболоида вращения* (рис. 2.35, *а),* а вращая вокруг действительной оси j, — *поверхность двуполостного гиперболоида вращения* (рис. 2.35, *б).* Очертанием отсека однополостного гиперболоида вращения на $П_2$ является дуга гиперболы m_2 — проекция главного меридиана гиперболоида — и два горизонтальных отрезка $к_2$ и g_2 — фронтальные проекции граничных окружностей *к* и g отсека поверхности с концами на очерке m_2.

На плоскости Π_1 его проекция ограничена очерковой окружностью p_1 — проекцией горловины гиперболоида — и окружностями $k_1 \equiv g_1$. Для отсека поверхности двуполостного гиперболоида вращения фронтальным очерком является дуга гиперболы m_2 — проекция главного меридиана m — и отрезки $к_2$, g_2 — проекции

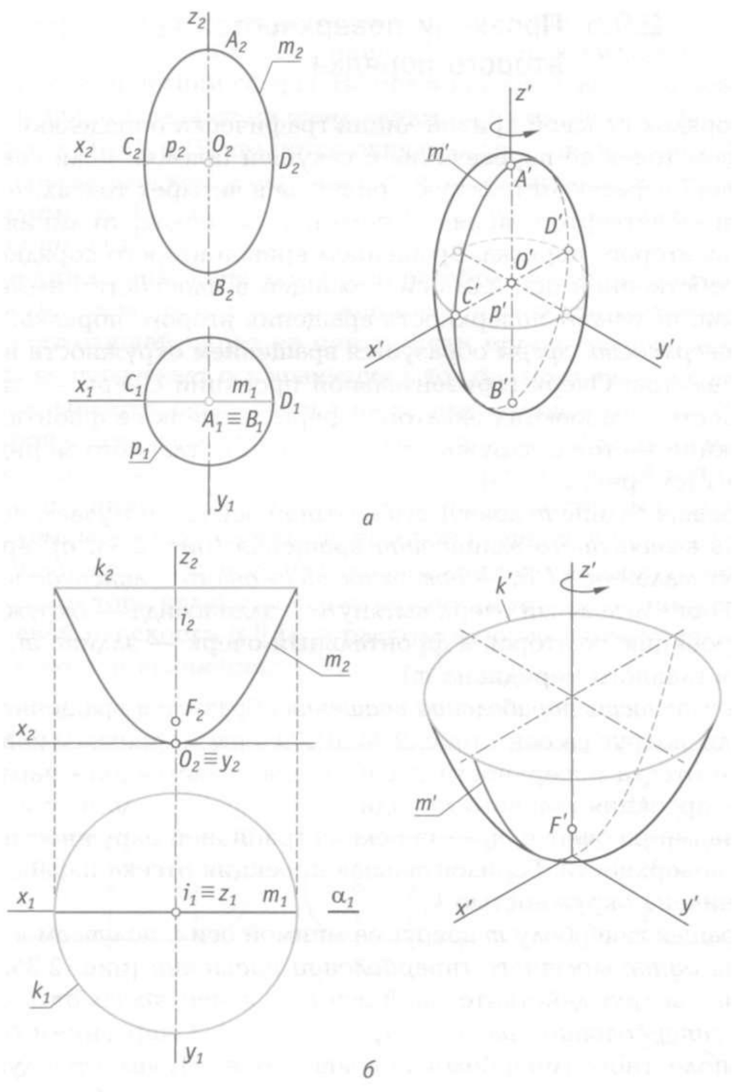


Рис. 2.34

граничных окружностей k и g отсека поверхности. На поле Π_1 проекция отсека гиперболоида ограничена окружностями $k_1 \equiv g_1$.

Линейчатые поверхности вращения образуются вращением распавшихся кривых второго порядка. Вращением двух параллельных прямых a и b вокруг оси симметрии i образуют *прямую* *круговую цилиндрическую поверхность* (рис. 2.36, а). Так как $i \perp \Pi_1$, эту поверхность называют горизонтально-проецирующей.

Вращением двух симметричных относительно оси i прямых a и b, лежащих в плоскости а и пересекающихся в точке S, вокруг

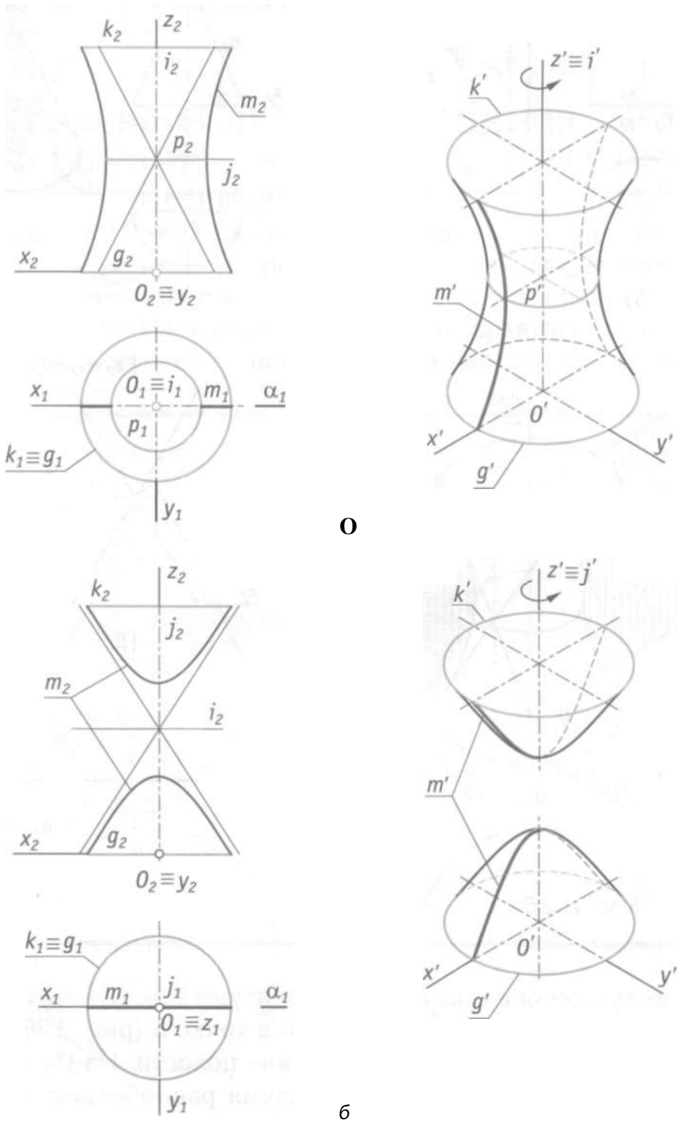


Рис. 2.35

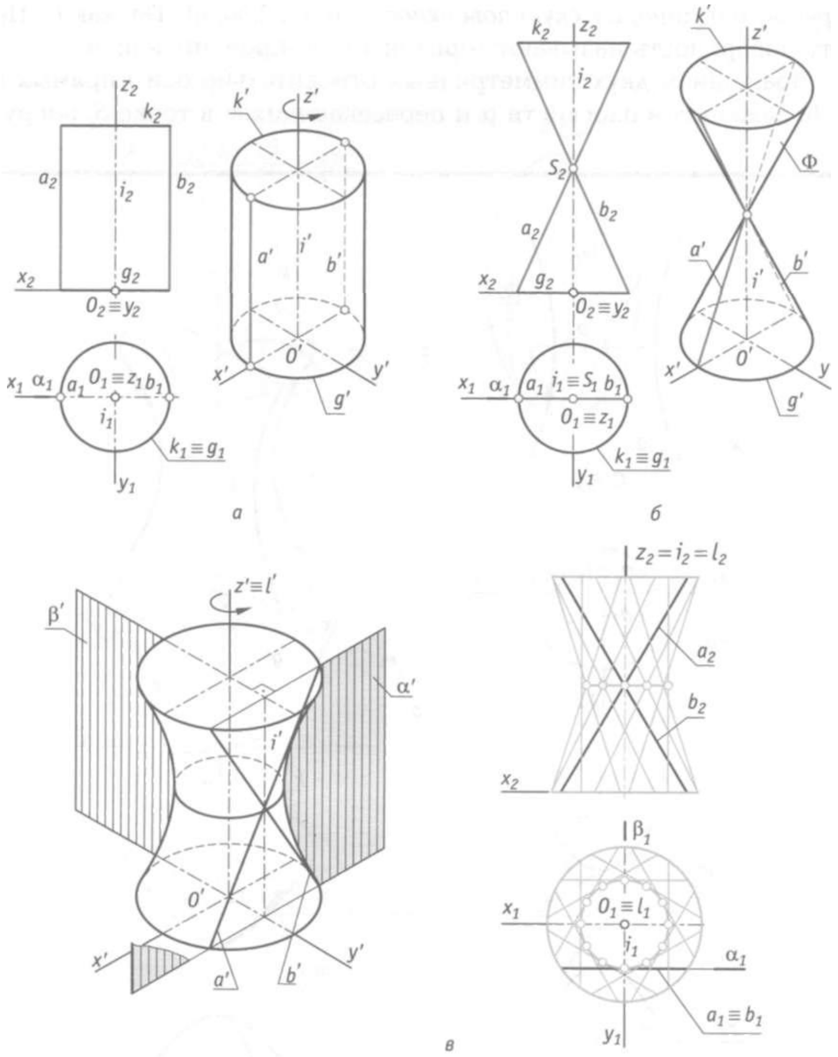


Рис. 2.36

их вертикальной оси симметрии i образуют *прямую круговую коническую поверхность* Ф с вершиной в точке S (рис. 2.36, *б*). Поверхность Ф имеет верхнюю и нижнюю полости. На $П_2$ проекция отсека поверхности Ф ограничена двумя равнобедренными треугольниками с общей вершиной S_2. Их боковые стороны a_2 и Ь$_2$ — проекция главного меридиана конической поверхности, а их основания k_2 и g_2 — проекции граничных окружностей k и g отсека поверхности.

Поверхность однополостного гиперболоида вращения получают еще вращением пересекающихся прямых a и b с вертикальной осью симметрии i, принадлежащих плоскости α, вокруг оси вращения l, расположенной в плоскости симметрии β прямых a и Ь (рис. 2.36, в).

2.10. КАРКАСНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНОСТИ

Задача 2.5. На чертеже поверхности построить проекции сколь угодно плотного каркаса графически простых линий. Графически простую линию (прямую и окружность) строят с помощью линейки или циркуля. На чертеже поверхности практически невозможно построить проекции непрерывного каркаса ее образующих.

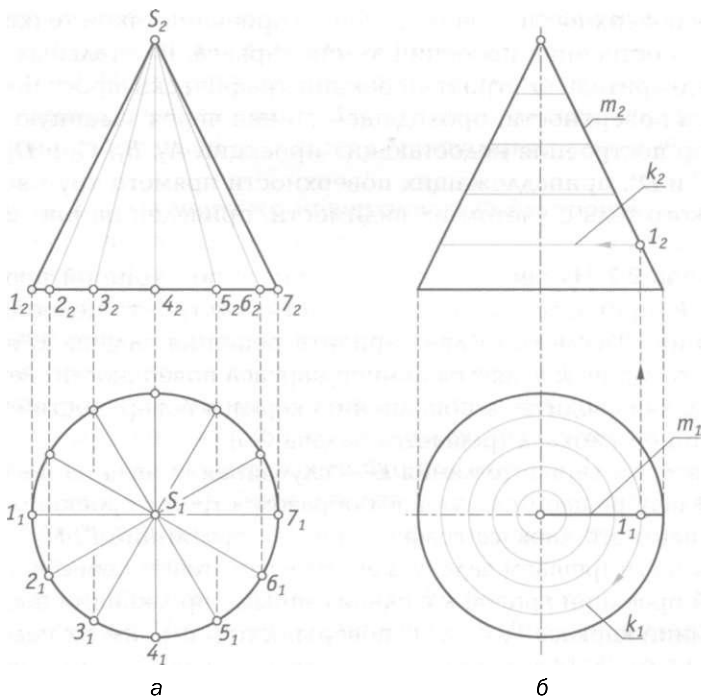


Рис. 2.37

Поэтому прибегают к построению достаточно плотного каркаса графически простых линий, например каркаса прямых (рис. 2.37, *а)* и окружностей (рис. 2.37, *б)* на чертеже поверхности прямого кругового конуса. При необходимости чертеж поверхности дополняют проекциями новых линий каркаса.

Задача 2.6. На чертеже поверхности по одной проекции точки, принадлежащей поверхности, построить ее вторую проекцию. Решение этой задачи основывается на решении задачи 2.5 при условии, что любая точка принадлежит поверхности Ф, если она принадлежит какой-либо графически простой линии каркаса этой поверхности, т. е. прямой или окружности. Точка А принадлежит поверхности конуса (рис. 2.38, а), так как она расположена на образующей *1* конуса.

Если точка принадлежит некоторой поверхности, то на чертеже поверхности должно выполняться следующее условие (эпюрный признак): проекции точки должны принадлежать одноименным проекциям графически простой линии каркаса поверхности. Если на чертеже поверхности одна из проекций ее точки принадлежит очерку поверхности, то недостающие проекции такой точки находят без построения проекций линии каркаса. В остальных случаях предварительно строят проекции графически простой линии каркаса поверхности, проходящей по ней через заданную точку. Пример построения недостающих проекций $A_ъ$ B_{I}, C_3 и D точек *A, B, C* и *D"*, принадлежащих поверхности прямого кругового конического тела с учетом их видимости, приведен на рис. 2.38, *б*.

Задача 2.7 На чертеже поверхности Ф по заданной проекции линии *к*, принадлежащей поверхности, построить недостающие проекции. Рассмотрим два варианта решения задачи. В первом варианте линия *к* является линией каркаса поверхности. Решение этой задачи сводится к пополнению каркаса поверхности еще одной линией каркаса (решается задача 2.5).

Во втором варианте линия *к* — случайная кривая на поверхности. Задачу решаем следующим образом: строим проекции достаточно плотного каркаса графически простых линий $l^1, l^2, \ldots, l^n$ на поверхности (решаем задачу 2.5); отмечаем точки пересечения заданной проекции кривой *к* с одноименными проекциями построенных линий каркаса $l^1, l^2, \ldots, l^n$ поверхности и строим их недостаю-

* На чертеже поверхности или поверхности тела заданные проекции точек отмечены крестиком.

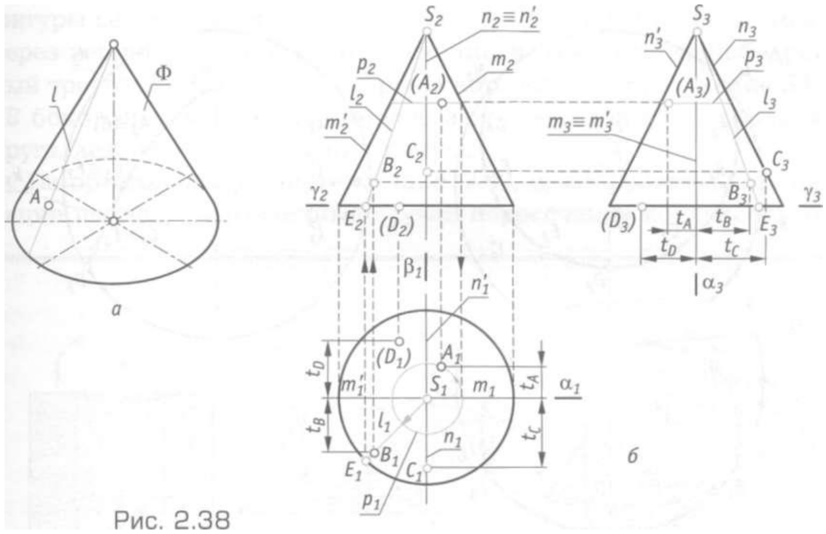


Рис. 2.38

щие проекции (решаем задачу 2.6); соединяем между собой лекальной кривой проекции построенных точек и получаем искомые проекции кривой *к*. Задачу решаем по схеме: задача 2.5 → задача 2.6 → задача 2.7. Пример построения горизонтальной проекции k_1 кривой *к*, принадлежащей видимой части поверхности сферы, по ее заданной фронтальной проекции $к_2$ приведен на рис. 2.39.

Задача 2.8. На чертеже поверхности Ф построить проекции линии пересечения плоскости α, заданной своими проекциями, с поверхностью Ф геометрического тела. Плоскость α частного положения пересекает полную поверхность тела вращения Ф по плоской фигуре, называемой его *сечением* и ограниченной замкнутой кривой линией *к*, называемой границей фигуры сечения. Одна из проекций линии *к* совпадает с вырожденной проекцией плоскости α. Точки кривой *к* находим на пересечении простейших линий каркаса поверхности Ф с плоскостью α. На поверхности Ф линия *к* — случайная. На линейчатой поверхности рациональнее выбирать каркас прямых, а на поверхности вращения — каркас окружностей.

Задачу решаем по схеме: задача 2.5 → задача 2.6 → задача 2.7 → задача 2.8. Построение линии *к* начинаем с определения ее опорных (характерных) точек, к которым относятся: *экстремальные точки* — точки наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций; *точки видимости* — точки на очерках поверхно-

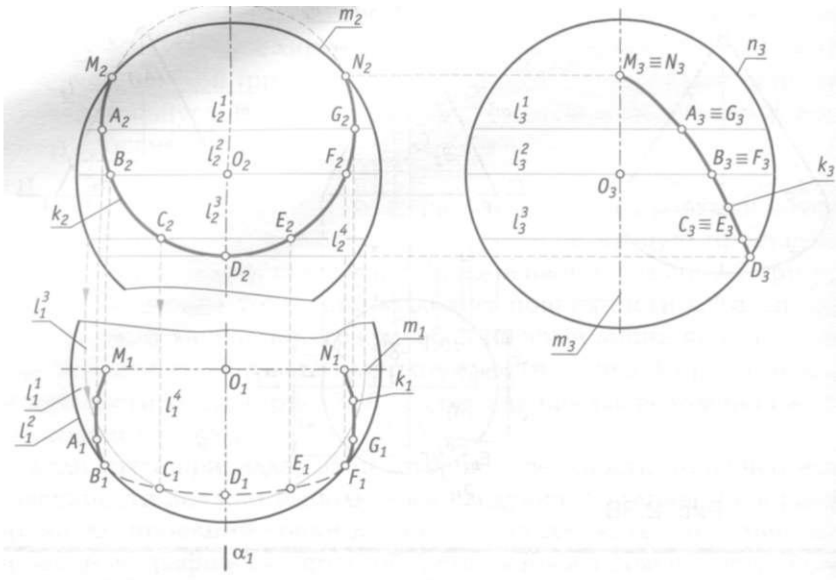


Рис. 2.39

сти, делящие кривую *к* на видимую и невидимую части; проекции кривой *к* в этих точках касаются очерков поверхности Ф.

В зависимости от положения секущей плоскости а относительно оси i цилиндра фигурой сечения Σ могут быть (рис. 2.40, а): прямоугольник, если $\alpha \parallel i$; круг, если $\alpha \perp i$; плоская фигура, ограниченная эллипсом *к,* если α наклонена к оси i под углом $0° < \varphi < 90°$.

При различном расположении секущей плоскости а относительно оси i прямого кругового конуса получают различные фигуры сечения конуса плоскостью (рис. 2.40, *б).* Поверхность прямого кругового конуса является носителем кривых второго порядка: окружности, эллипса, параболы и гиперболы. Их границами служат кривые второго порядка, называемые коническими сечениями.

Если секущая плоскость $\alpha^1 \perp i$, то фигура сечения — круг, границей которого является окружность. Если секущая плоскость α^2 пересекает все образующие поверхности конуса, то в сечении получается плоская фигура, границей которой является эллипс. Если плоскость α^3 параллельна одной образующей поверхности конуса, то частью границы фигуры сечения является парабола. Если плоскость α^4 параллельна двум образующим поверхности конуса и, в частности, параллельна его оси, то частью границы фигуры сечения является гипербола. Если плоскость α^5 проходит через вершину 5 конуса, то в сечении получается равнобедренный треугольник, боковые стороны которого — образующие *SA* и *SB* боковой поверхности конуса, а его основание — хорда *AB* круга, лежащего в основании конуса.

На ортогональном чертеже (рис. 2.40, в) во фронтальной проекции приведены различные случаи пересечения конуса, ось ко-

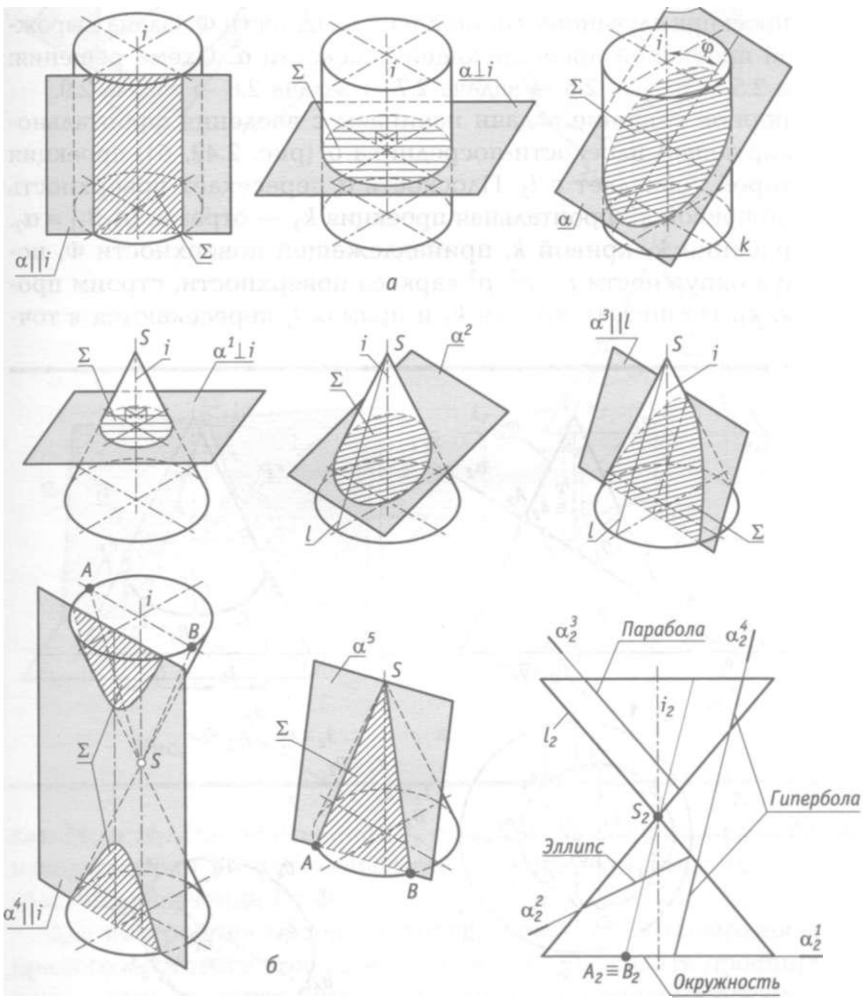


Рис. 2.40

в

торого $i \perp \Pi_1$, плоскостью $\alpha \perp \Pi_2$. На рис. 2.41 построены проекции и натуральная величина эллипса k — границы фигуры сечения прямого кругового конуса плоскостью $\alpha \perp \Pi_2$.

Задача **2.9.** На чертеже поверхности Ф и прямой *1* построить проекции точек их пересечения. Задачу решаем следующим образом (рис. 2.42, *а):* через прямую *1* проводим вспомогательную плоскость-посредник а; строим линию *к* пересечения плоскости α с поверхностью Ф; находим точки *М* и *N* пересечения прямой *1* с поверхностью Ф, как точки пересечения линий *1* и *к.* На чертеже одна проекция случайной линии *к* на поверхности Ф задана вырожденной проекцией проецирующей плоскости α. Схема решения: задача 2.5 $\rightarrow$ задача 2.6 $\rightarrow$ задача 2.7 $\rightarrow$ задача 2.8 $\rightarrow$ задача 2.9.

Эпюрное решение задачи начинаем с введения фронтально-проецирующей плоскости-посредника α (рис. 2.42, *б),* проекция α_2 которой совпадает с 1_2. Плоскость α пересекает поверхность тора по кривой *к.* Фронтальная проекция k_2 — отрезок $[A_2B_2] \equiv \alpha_2$ По проекции k_2 кривой *к,* принадлежащей поверхности Ф, используя окружности p^1, p^2, p^3 каркаса поверхности, строим проекцию k_1, На поле П[кривая k_1 и прямая l_1 пересекаются в точ-

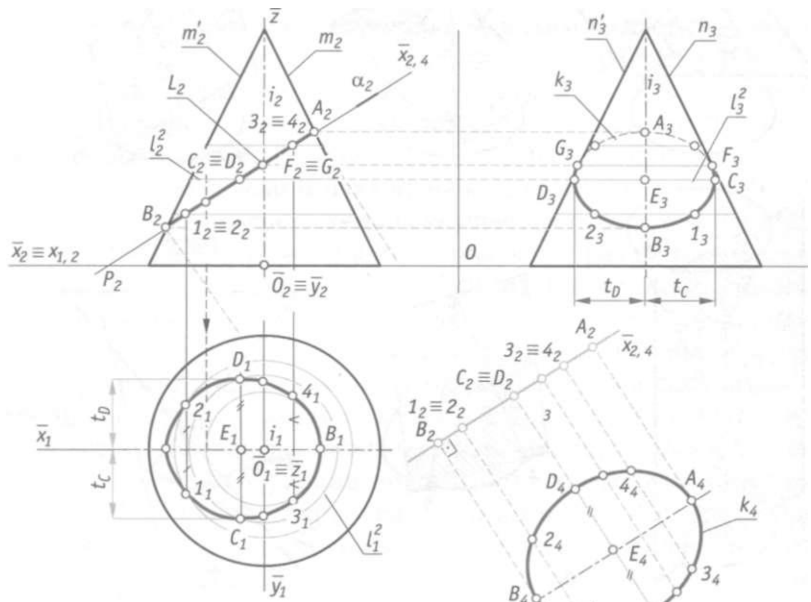


Рис. 2.41

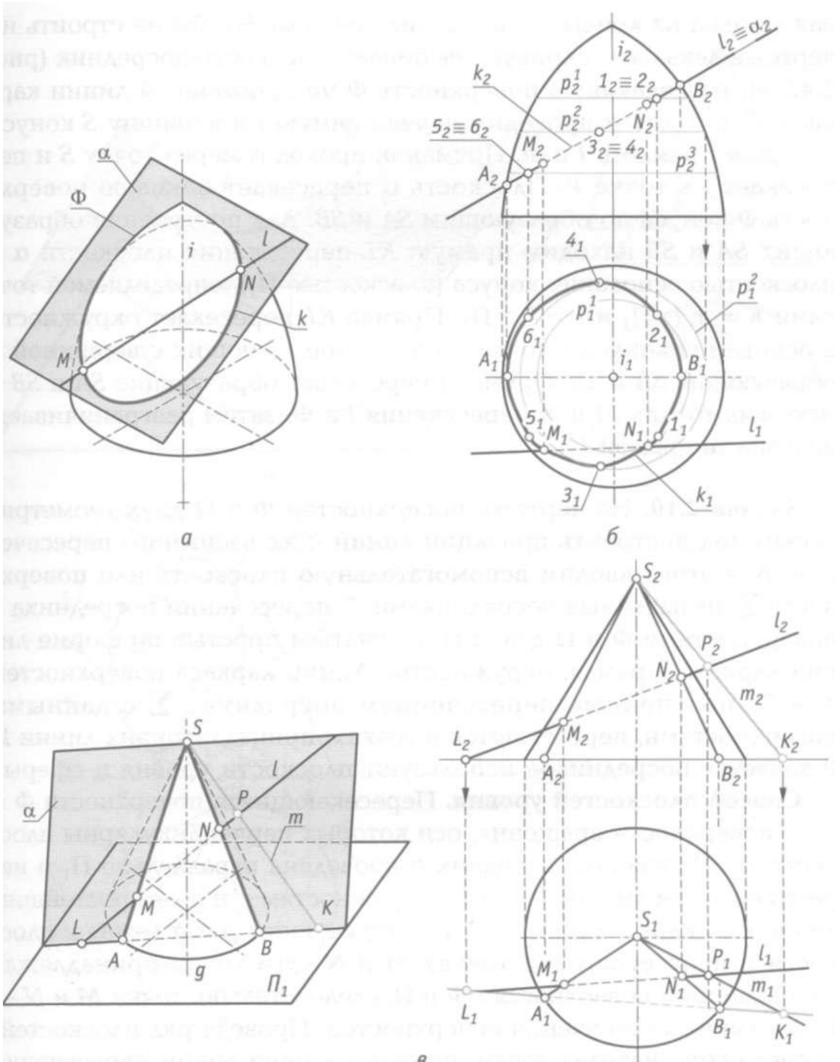


Рис. 2.42

ках M_1 и N_1. На пересечении l_2 с вертикальными линиями связи находим точки M_2 и N_2 — фронтальные проекции искомых точек M и N пересечения l с Ф.

Для построения проекций точек пересечения поверхности Ф прямого кругового конуса и прямой l (l_1, l_2) вводить проецирующую плоскость-посредник $\alpha\perp\Pi_2$ или $\alpha\perp\Pi_1$ нецелесообразно, так как в сечении α с поверхностью конуса получится лекальная кривая — одна из кривых конических сечений. Чтобы не строить на чертеже лекальную кривую, выбираем плоскость-посредник (рис. 2.42, в), рассекающую поверхность Ф по простейшей линии каркаса. Плоскость а проводим через прямую *1* и вершину *S* конуса и задаем прямыми *1 и т.* Прямая *т* проходит через точку *S* и пересекает *1* в точке *P.* Плоскость α пересекает боковую поверхность Ф конуса по образующим *SA* и *SB.* Для построения образующих *SA* и *SB* находим прямую *KL* пересечения плоскости α с плоскостью основания конуса (плоскостью Π_1), определяемой точками $K = m \cap \Pi_1$ и $L = l \cap \Pi_1$. Прямая *KL* пересекает окружность g основания конуса в точках *A и B,* определяющих с вершиной 5 образующие *SA* и *SB.* Прямая *1* пересекает образующие *SA* и *SB* в искомых точках *M* и *N* пересечения *1* и Ф, затем разграничиваем видимость прямой *1.*

Задача 2.10. На чертеже поверхностей Ф и Ω двух геометрических тел построить проекции линий *к* их взаимного пересечения. Для этого вводим вспомогательную плоскость или поверхность Σ, называемые посредниками. В пересечении посредника с поверхностями Ф и Ω должны получаться простые по форме линии каркаса (прямая, окружность). Линии каркаса поверхностей Ф и Ω, полученные пересечением посредника Σ с данными поверхностями, пересекаются в точках, принадлежащих линии *к.* В качестве посредников используют плоскости уровня и сферы.

Способ плоскостей уровня. Пересекающиеся поверхности Ф и Ω — поверхности вращения, оси которых перпендикулярны плоскости Π_1. Плоскость-посредник σ проведена параллельно Π_1 и пересекает поверхности Фи Ω по окружностям р и g — простейшим линиям их каркаса (рис. 2.43, *а).* Окружности р и g лежат в плоскости и пересекаются в точках *M* и *N.* Эти точки принадлежат одновременно поверхностям Ф и Ω, следовательно, точки *Ми N* — точки линии пересечения поверхностей. Проведя ряд плоскостей-посредников, находят точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Проекции линии пересечения поверхностей располагают в пределах площади наложения, т.е. общей площади одноименных проекций пересекающихся поверхностей. Площадь наложения проекций поверхностей заштрихована (рис. 2.43, *б).*

Построение проекции линии *к* пересечения поверхностей эллипсоида вращения и прямого кругового конуса, оси которых перпендикулярны плоскости Π_1 (рис. 2.43, в), начинают с выявления одного из двух возможных посредников: фронтальных или горизонтальных плоскостей уровня. Затем определяют опорные

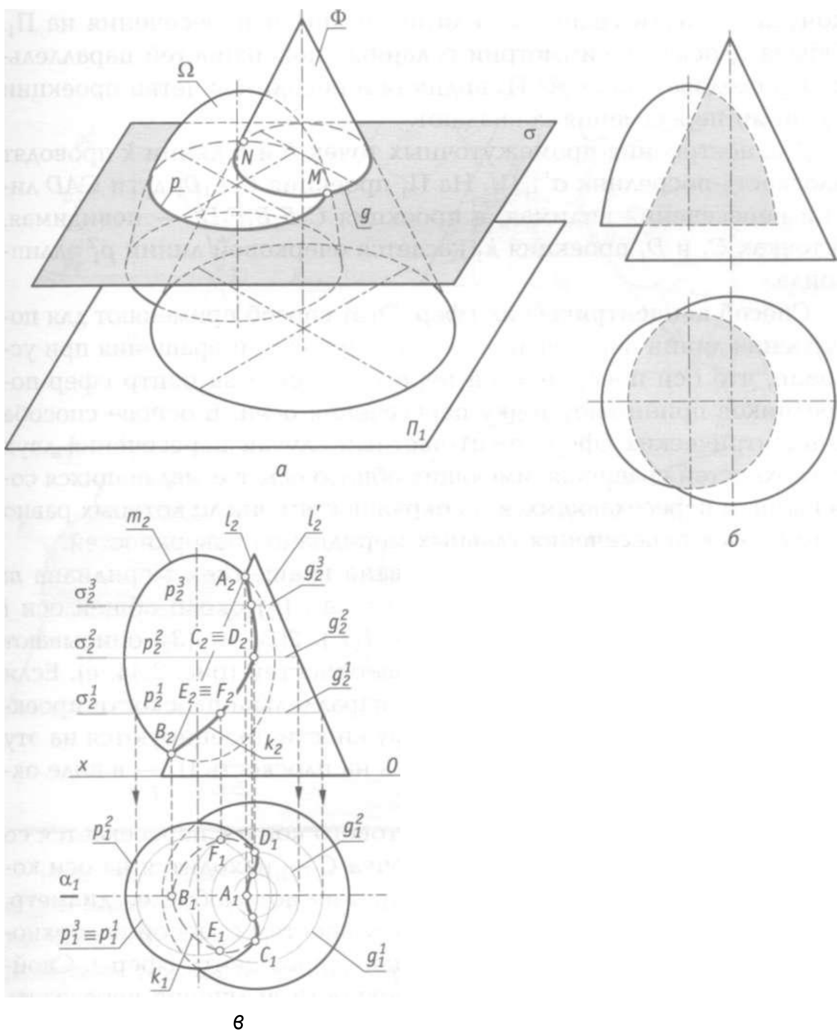


Рис. 2.43

точки линии *к:* точки наименее и наиболее удаленные от плоскостей проекций — экстремальные точки; точки, принадлежащие линиям очертания поверхностей, и среди них точки видимости.

В этих точках проекция линии пересечения касается очерковых линий пересекающихся поверхностей. *A и B* — это высшая и низшая точки линии пересечения по отношению к плоскости Π_1. Точки C и *D* пересечения экватора эллипсоида с поверхностью конуса — точки границы видимости линии пересечения на Π_1 Общая плоскость симметрии α данных поверхностей параллельна Π_2, следовательно, на Π_2 видимая и невидимая ветви проекции κ_2 линии пересечения совпадают.

Для построения промежуточных точек E и F линии κ проводят плоскость-посредник $\sigma^1 \| \Pi_1$. На Π_1 проекция $C_1A_1D_1$ дуги CAD линии пересечения видимая, а проекция $C_1E_1B_1F_1D_1$ — невидимая. В точках C_1 и D_1 проекция k_1 касается очерковой линии p_1^2 эллипсоида.

Способ концентрических сфер. Этот способ применяют для построения линии пересечения двух поверхностей вращения при условии, что оси поверхностей пересекаются и за центр сфер-посредников принимают точку пересечения осей. В основе способа концентрических сфер лежит частный случай пересечения двух поверхностей вращения, имеющих общую ось, т. е. являющихся соосными, и пересекающихся по окружностям, число которых равно числу точек пересечения главных меридианов поверхностей.

Если одна поверхность образована вращением меридиана m ($ш_2$), а другая — вращением меридиана l (l_2) около общей оси i ($г_2$), то общие точки меридианов — $1(1_2)$, $2(2_2)$ и $3(3_2)$ описывают окружности, общие для данных поверхностей (рис. 2.44, *а*). Если общая ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, например плоскости Π_2, то окружности проецируются на эту плоскость в виде отрезков прямых, а на плоскость Π_1 — в виде окружностей.

Пусть поверхность прямого кругового конуса пересекается со сферой, причем центр сферы — точка С — находится на оси конуса (рис. 2.44, б). За ось сферы принимают любой ее диаметр. Сфера соосна и пересекается по окружностям с любой поверхностью вращения, ось которой проходит через центр сферы. Свойство сферы с центром на оси поверхности вращения пересекать ее по окружностям и положено в основу способа концентрических сфер, т. е. сфер с общим центром. Построение проекции линии пересечения κ двух конических поверхностей вращения Ф и Ω с осями i и j (рис. 2.44, в) невозможно выполнить способом вспомогательных плоскостей уровня, так как в горизонтальных плоскостях-посредниках на поверхности конуса Ф имеем семейство окружностей, а на поверхности Ω усеченного конуса — семейство гипербол. Во фронтальных плоскостях уровня обе поверхности содержат семейства гипербол. Поэтому в качестве посредников используют концентрические сферы-посредники с центром в точке C пересечения осей i и j заданных поверхностей.

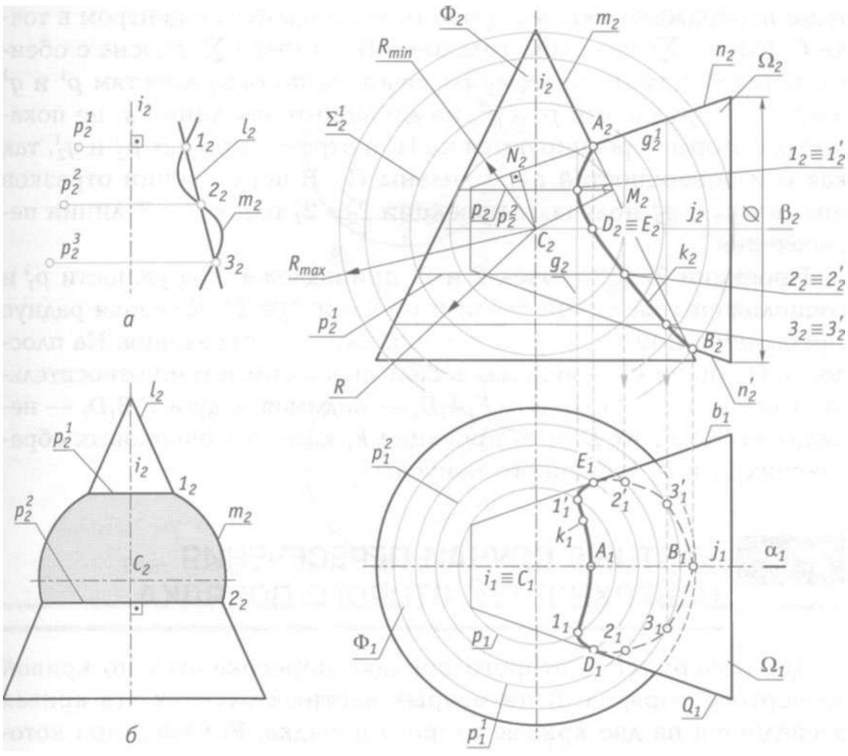


Рис. 2.44 в

Решение задачи начинают с определения сфер минимального R_{min} и максимального R_{max} радиусов. Величины R_{min} и R_{max} определяют на той плоскости проекций, по отношению к которой оси поверхностей параллельны. Сфера минимального радиуса должна быть вписана в поверхность конуса и соприкасаться с ней по окружности p, а с поверхностью Ω — пересекаться по окружности g. Поверхность Ф конуса не пересечется со сферой, если $R_{min} = |C_2N_2|$. Для определения величины R_{max} отмечают проекции A_2 и B_2 экстремальных точек *(A* — высшая точка; *B* — низшая точка) пересечения очерковых образующих m_2 и n_2, n_2', лежащих в общей плоскости симметрии α. Расстояние от центра C_2 до наиболее удаленной от него точки B_2 является радиусом наибольшей сферы, т.е. $R_{max} = |C_2B_2|$. Величины радиусов R остальных сфер-посредников должны удовлетворять условию: $R_{min} \le R \le R_{max}$.

Для построения промежуточных точек 2 и $2'$ проводят сферу-посредник Σ^1 радиуса R с центром в точке С. Эту сферу на чертеже изображают окружностью того же радиуса с центром в точке C_2 (сфера Σ^1 показана только на Π_2). Сфера Σ^1 соосна с обеими поверхностями, поэтому рассечет их по окружностям p^1 и g^1 (еще две окружности p^2 и g^2, не дающие точек линии k, не показаны), которые проецируются на Π_2 в отрезки прямых p_2^1 и g_2^1, так как оси поверхностей параллельны Π_2. В пересечении отрезков прямых p_2^1 и g_2^1 получают проекции $2_2 = 2'_2$ точек 2 и $2'$ линии пересечения.

Проекции 2_1 и $2'_1$ точек 2 и $2'$ принадлежат окружности p_1^1 и расположены на линии связи с точками $2_2 \equiv 2'_2$, Изменяя радиус сферы-посредника, получают точки линии пересечения. На плоскости Π_2 линия k_2 — видимая в силу своей симметрии относительно плоскости α. На Π_1 дуга $E_1A_1D_1$ — видимая, а дуга $E_1B_1D_1$ — невидимая. В точках D_1 и E_1 проекция k_1 касается очерковых образующих a_1 и b_1 усеченного конуса.

2.11. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Две поверхности второго порядка пересекаются по кривой четвертого порядка. В некоторых частных случаях эта кривая распадается на две кривые второго порядка. Условия, при которых линия пересечения двух поверхностей второго порядка распадается на две кривые второго порядка, формулируются в теоремах, приведенных далее без доказательства.

Теорема 2.1. Если две поверхности второго порядка содержат общую кривую второго порядка, то они пересекаются еще по одной кривой второго порядка.

Рассмотрим пересечение сферы с поверхностью усеченного наклонного конуса, имеющей круговое основание р, расположенное на данной сфере (рис. 2.45). Эти поверхности содержат общую окружность р. Линия их пересечения распадается на две окружности: данную окружность р и вторую окружность g, так как любая плоская кривая на сфере является окружностью. Окружность ∂ найти легко, поскольку общая плоскость симметрии поверхностей — плоскость а — параллельна Π_2, поэтому искомая окружность изобразится на этой плоскости отрезком прямой ∂_2, определяемым точками C_2 и D_2. По фронтальной проекции ∂_2 окружности g, принадлежащей поверхности сферы, достраиваем горизонтальную проекция g_1

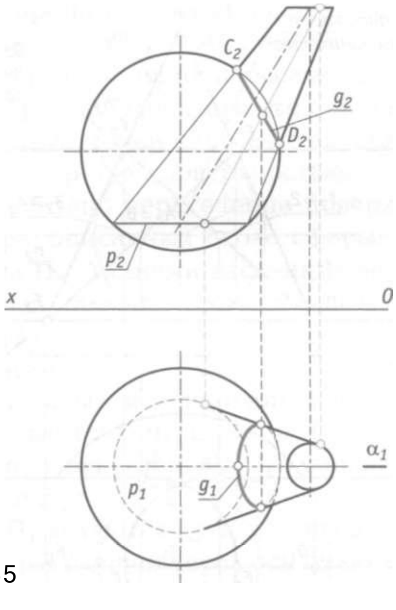


Рис. 2.45

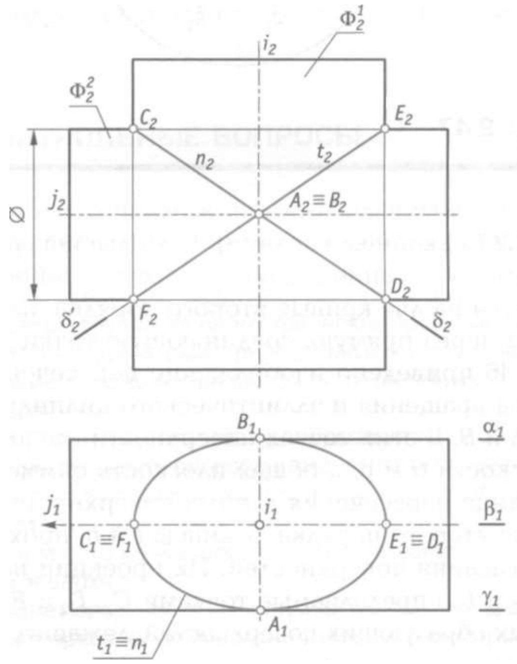


Рис. 2.46

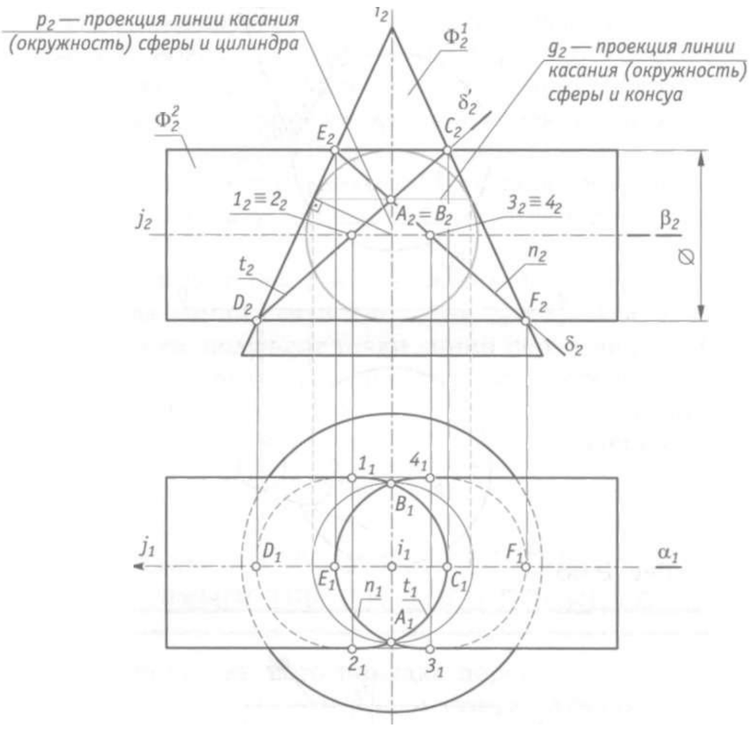


Рис. 2.47

Теорема 2.2 **(о двойном касании).** Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

На рис. 2.46 приведено изображение пересечения поверхностей цилиндра вращения и эллиптического цилиндра, касающихся в точках А и В. В этих точках поверхности имеют общие касательные плоскости α и β, а общая плоскость симметрии γ параллельна $П_2$. Линия пересечения данных поверхностей распадается на две кривые второго порядка: эллипсы t in , проходящие через точки А и В касания поверхностей. Их проекции на $П_2$ — отрезки прямых n_2 и t_2, определяемые точками C_2, D_2 и E_2, F_2 пересечения очерковых образующих поверхностей, лежащих в плоскости γ. Горизонтальные проекции $t_1 \equiv n_1$ эллипсов *t* и n совпадают с горизонтальной проекцией эллиптического цилиндра.

Теорема 23 (теорема Г.Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка (или вписаны в нее), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания исходных поверхностей с третьей поверхностью.

На рис. 2.47 показано пересечение поверхностей вращения конуса и цилиндра, описанных около сферы, изображенной на чертеже только на $П_2$. Линиями касания поверхностей конуса и цилиндра со сферой являются окружности р и g, пересекающиеся в точках A_2 и B_2 — фронтальных проекциях точек *А и В* пересечения линий касания р и *д.* Линия пересечения поверхностей распадается на эллипсы *tun,* проецирующиеся на $П_2$ в отрезки t_2 и $л_2$, определяемые точками C_2, D_2 и E_2, F_2 пересечения фронтальных очерков поверхностей. На $П_1$ эллипсы f и *n* проецируются в эллипсы t_1 и n_1

Видимыми на $П_1$ являются дуги эллипсов, находящиеся выше плоскости β (β_2), проходящей через ось цилиндра. Точки видимости *1, 2 и 3, 4,* горизонтальные проекции которых являются точками касания эллипсов t_1, n_1 и горизонтальных очерковых образующих цилиндра, делят эллипсы t_1 и n_1 на видимые и невидимые части.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое изображение называют обратимым и как его строят?
2. Что такое чертеж Монжа и как задают на нем точку, прямую, плоскость и многогранник?
3. Что такое аксонометрический чертеж и как он образуется?
4. В каком случае аксонометрические проекции называются изометрическими, диметрическими и триметрическими?
5. Какие задачи называются позиционными? Приведите примеры.
6. Для чего нужен способ преобразования проекций?
7. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
8. Что такое поверхность вращения, как она образуется и как задается на чертеже?
9. В чем суть каркасного способа решения позиционных задач на поверхности?
10. Какие поверхности-посредники используют для построения линии пересечения поверхностей двух геометрических тел?
11. При каких условиях линия пересечения двух поверхностей второго порядка распадается на две кривые второго порядка?