ЛЕКЦИЯ 26

Тема 2.5. Кручение. Внутренние силовые факторы при кручении. Построение эпюр крутящих моментов

Иметь представление о деформациях при кручении, о внутренних силовых факторах при кручении.

Уметь строить эпюры крутящих моментов.

Деформации при кручении

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ, называемый *углом сдвига* (угол поворота образующей). Поперечные сечения разворачиваются на угол φ, называемый *углом закручивания* (угол поворота сечения, рис. 26.1).

Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

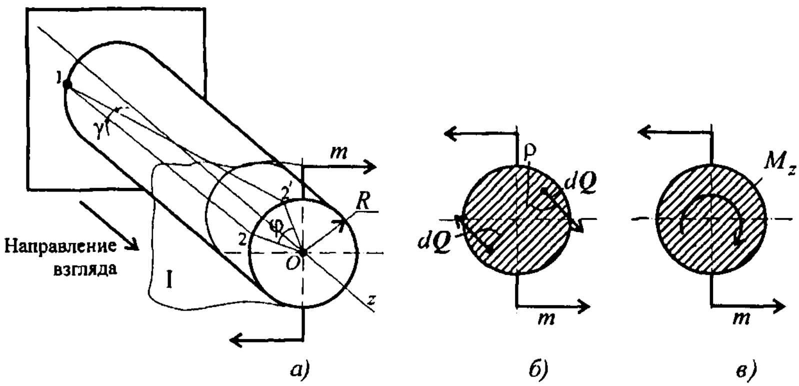


Рис. 26.1

Связь между угловыми деформациями определяется соотношением

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R};$$

l — длина бруса; R — радиус сечения.

Длина бруса значительно больше радиуса сечения, следовательно, $\varphi \gg \gamma$.

Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.

Гипотезы при кручении

1. Выполняется гипотеза плоских сечений: поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

2. Радиус, проведенный из центра поперечного сечения бруса, после деформации остается прямой линией (не искривляется).

3. Расстояние между поперечными сечениями после деформации не меняется. Ось бруса не искривляется, диаметры поперечных сечений не меняются.

Внутренние силовые факторы при кручении

Кручением называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент.

Внешними нагрузками также являются две противоположно направленные пары сил.

Рассмотрим внутренние силовые факторы при кручении круглого бруса (рис. 26.1).

Для этого рассечем брус плоскостью I и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 26.1а). Сечение рассматриваем со стороны отброшенной части.

Внешний момент пары сил разворачивает участок бруса против часовой стрелки, внутренние силы упругости сопротивляются повороту. В каждой точке сечения возникает поперечная сила dQ (рис. 26.1б). Каждая точка сечения имеет симметричную, где возникает поперечная сила, направленная в обратную сторону. Эти силы образуют пару с моментом $dm = \rho\, dQ$; ρ — расстояние от точки до центра сечения. Сумма поперечных сил в сечении равна нулю: $\sum dQ = 0$.

С помощью интегрирования получим суммарный момент сил упругости, называемый крутящим моментом:

$$M_\text{к} = \int_A dm = \int_A \rho\, dQ.$$

Практически крутящий момент определяется из условия равновесия отсеченной части бруса.

Крутящий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть (рис. 26.1в):

$\sum m_z = 0$, т. е. $-m + M_z = 0$; $M_z = m = M_\text{к}$.

Эпюры крутящих моментов

Крутящие моменты могут меняться вдоль оси бруса. После определения величин моментов по сечениям строим график-эпюру крутящих моментов вдоль оси бруса.

Крутящий момент считаем положительным, если *моменты внешних пар сил* направлены *по часовой стрелке*, в этом случае момент внутренних сил упругости направлен против часовой стрелки (рис. 26.2).

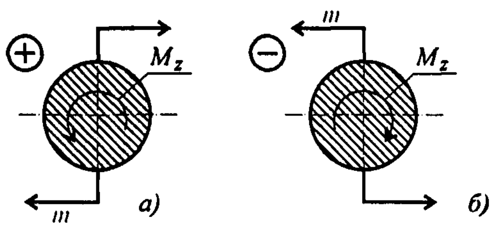


Рис. 26.2

Порядок построения эпюры моментов аналогичен построению эпюр продольных сил. Ось эпюры параллельна оси бруса, значения моментов откладывают от оси вверх или вниз, масштаб построения выдерживать обязательно.

Примеры решения задач

Пример 1. На распределительном валу (рис. 26.3) установлены четыре шкива, на вал через шкив 1 подается мощность 12 кВт, которая через шкивы 2, 3, 4 передается потребителю; мощности распределяются следующим образом: $P_2 = 8$ кВт, $P_3 = 3$ кВт, $P_4 = 1$ кВт, вал вращается с постоянной скоростью $\omega = 25$ рад/с. Построить эпюру крутящих моментов на валу.

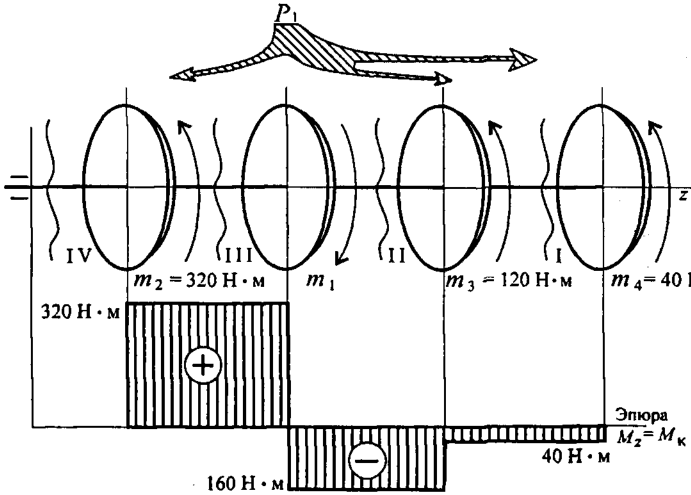


Рис. 26.3

Решение

1. Определяем моменты пар сил на шкивах.

Вращающий момент определяем из формулы мощности при вращательном движении $P = m\omega$, $m = \dfrac{P}{\omega}$.

Момент на шкиве 1 движущий, а моменты на шкивах 2, 3, 4 — моменты сопротивления механизмов, поэтому они имеют противоположное направление. Брус скручивается между движущим моментом и моментами сопротивления. При равновесии момент движущий равен сумме моментов сопротивления:

$$m_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{25} = 480\,\text{Н} \cdot \text{м}; \qquad m_2 = \frac{8 \cdot 10^3}{25} = 320\,\text{Н} \cdot \text{м};$$

$$m_3 = \frac{3 \cdot 10^3}{25} = 120\,\text{Н} \cdot \text{м}; \qquad m_4 = \frac{1 \cdot 10^3}{25} = 40\,\text{Н} \cdot \text{м};$$

$$m_1 = m_2 + m_3 + m_4; \qquad m_1 = 320 + 120 + 40 = 480\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

2. Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях бруса с помощью метода сечений.

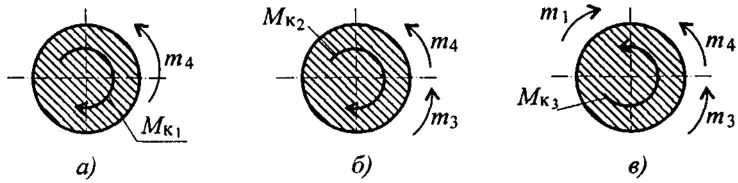


Рис. 26.4

Сечение I (рис. 26.4а):

$-m_4 + M_{к_1} = 0$; $M_{к_1} = m_4$; $M_{к_1} = 40\,Н \cdot м$ — крутящий момент отрицательный.

Сечение II (рис. 26.4б):

$-m_4 - m_3 + M_{к_2} = 0$; $M_{к_2} = m_4 + m_3$; $M_{к_2} = 40 + 120 = 160\,Н \cdot м$ — крутящий момент отрицательный.

Сечение III (рис. 26.4в):

$-m_4 - m_3 + m_1 - M_{к_3} = 0$; $-M_{к_3} = m_4 + m_3 - m_1$; $-M_{к_3} = 40 + 120 - 480$; $M_{к_3} = 320\,Н \cdot м$ — крутящий момент положительный.

Сечение IV:

$M_{к_4} = -m_4 - m_3 + m_1 - m_2 = 0$.

3. Строим эпюру крутящих моментов. Заметим, что ***скачок на эпюре всегда численно равен приложенному вращающему момент***

Выбираем соответствующий масштаб.

Откладываем значения моментов, штрихуем эпюру поперек, об водим по контуру, записываем значения моментов (см. эпюру под схемой вала (рис. 26.3)). Максимальный крутящий момент на участ ке III $M_{к_3} = 320\,Н \cdot м$.

Пример 2. Выбрать рациональное расположение колес на вал (рис. 26.5). $m_1 = 280\,Н \cdot м$; $m_2 = 140\,Н \cdot м$; $m_3 = 80\,Н \cdot м$.

П р и м е ч а н и е. Меняя местами колеса (шкивы) на валу можно изменять величины крутящих моментов. Рациональным расположением является такое, при котором крутящие моменты принимают минимальные из возможных значения.

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 = 280 + 140 + 80 = 500\,Н \cdot м.$$

Рассмотрим нагрузки на валу при различном расположении колес.

Из представленных вариантов наиболее рационально расположение шкивов в третьем случае, здесь значения крутящих моментов минимальны. Вывод: при установке шкивов желательно, чтобы мощность подавалась в середине вала и по возможности равномерно распределялась направо и налево.

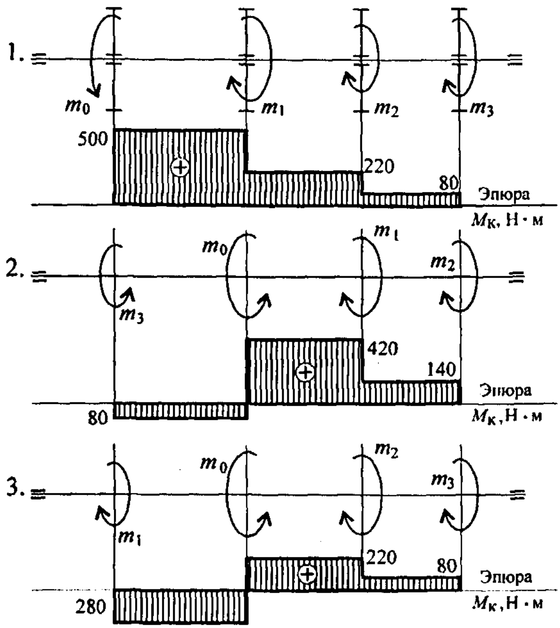


Рис. 26.5

Первый вариант: $M_к^{max} = 500\,Н \cdot м$.
Второй вариант: $M_к^{max} = 420\,Н \cdot м$.
Третий вариант: $M_к^{max} = 280\,Н \cdot м$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие деформации возникают при кручении?
2. Какие гипотезы выполняются при деформации кручения?
3. Изменяются ли длина и диаметр вала после скручивания?

4. Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?

5. Что такое рациональное расположение колес на валу?

6. Для заданного вала (рис. 26.6) выбрать соответствующую эпюру крутящих моментов (а, б, в). $m_1 = 40\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_2 = 180\,\text{Н}\cdot\text{м}$; $m_0 = 280\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

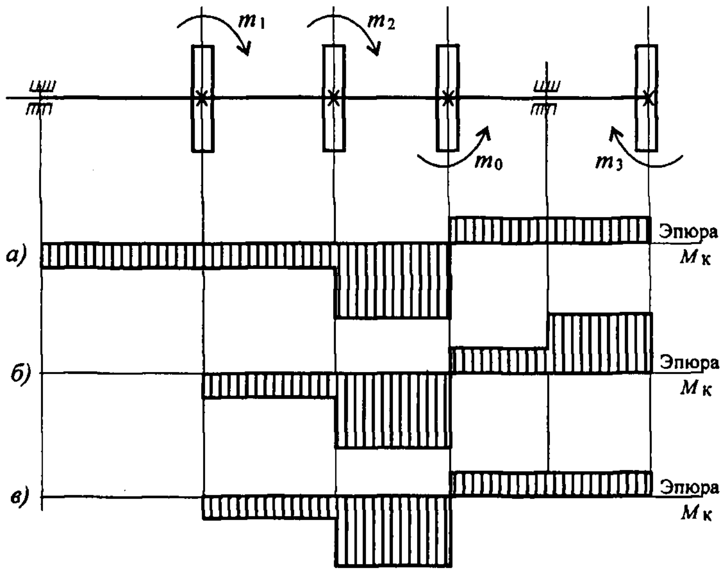


Рис. 26.6

7. В каком порядке рациональнее расположить шкивы на валу для уменьшения нагрузки на вал (рис. 26.7)?

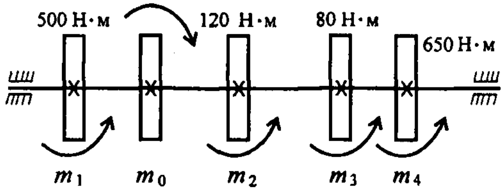


Рис. 26.7

Варианты ответов:
1. m_0; m_1; m_2; m_3; m_4.
2. m_2; m_3; m_0; m_4; m_1.
3. m_3; m_4; m_0; m_1; m_2.
4. m_4; m_3; m_0; m_1; m_2.

ЛЕКЦИЯ 27

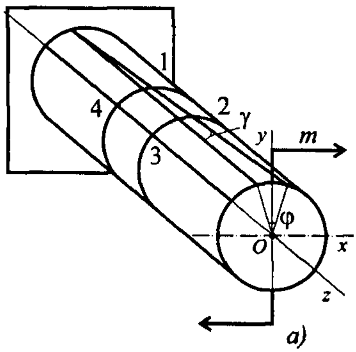
Тема 2.5. Кручение. Напряжения и деформации при кручении

Иметь представление о напряжении и деформациях при кручении, о моменте сопротивления при кручении.

Знать формулы для расчета напряжений в точке поперечного сечения, закон Гука при кручении.

Напряжения при кручении

Проводим на поверхности бруса сетку из продольных и поперечных линий и рассмотрим рисунок, образовавшийся на поверхности после деформации (рис. 27.1а). Поперечные окружности, оставаясь плоскими, поворачиваются на угол φ, продольные линии искривляются, прямоугольники превращаются в параллелограммы. Рассмотрим элемент бруса 1234 после деформации.



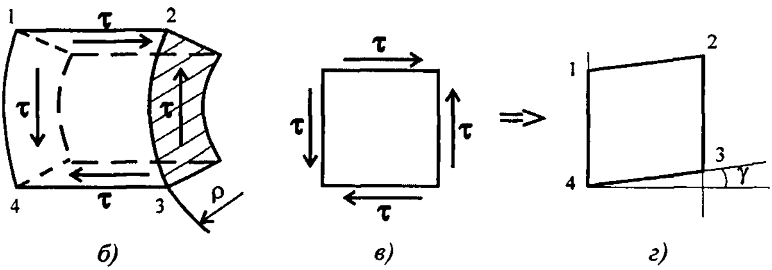


Рис. 27.1

При выводе формул используем закон Гука при сдвиге и гипотезу плоских сечений и неискривления радиусов поперечных сечений

При кручении возникает напряженное состояние, называемое «чистый сдвиг» (рис. 27.1б).

При сдвиге на боковой поверхности элемента 1234 возникают касательные напряжения, равные по величине (рис. 27.1в), элемент деформируется (рис. 27.1г).

Материал подчиняется закону Гука. Касательное напряжение пропорционально углу сдвига.

Закон Гука при сдвиге $\tau = G\gamma$,
G — модуль упругости при сдвиге, Н/мм^2; γ — угол сдвига, рад.

Напряжение в любой точке поперечного сечения

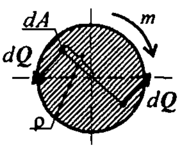


Рис. 27.2

Рассмотрим поперечное сечение круглого бруса. Под действием внешнего момента в каждой точке поперечного сечения возникают силы упругости dQ (рис. 27.2).

$$dQ = \tau\, dA,$$

где τ — касательное напряжение; dA — элементарная площадка.

В силу симметрии сечения силы dQ образуют пары (см. лекцию 26).

Элементарный момент силы dQ относительно центра круга

$$dm = \rho\, dQ,$$

где ρ — расстояние от точки до центра круга.

Суммарный момент сил упругости получаем сложением (интегрированием) элементарных моментов:

$$M_{\text{к}} = \int_A dm = \int_A \rho\, dQ = \int_A \tau\rho\, dA.$$

После преобразования получим формулу для определения напряжений в точке поперечного сечения:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}\rho}{\mathcal{J}_p}, \quad \text{где} \quad \mathcal{J}_p = \int_A \rho^2\, dA.$$

При $\rho = 0$ $\tau_к = 0$; касательное напряжение при кручении пропорционально расстоянию от точки до центра сечения. Полученный интеграл $\mathcal{J}_p$ (лекция 25) называется полярным моментом инерции сечения. $\mathcal{J}_p$ является геометрической характеристикой сечения при кручении. Она характеризует сопротивление сечения скручиванию.

Анализ полученной формулы для $\mathcal{J}_p$ показывает, что слои, расположенные дальше от центра, испытывают большие напряжения.

Эпюра распределения касательных напряжений при кручении (рис. 27.3)

$M_к$ — крутящий момент в сечении;

ρ_B — расстояние от точки B до центра;

τ_B — напряжение в точке B;

$\tau_к^{\max}$ — максимальное напряжение.

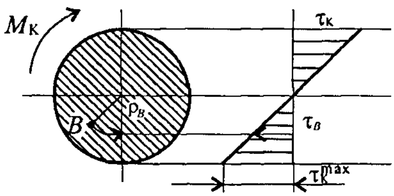


Рис. 27.3

Максимальные напряжения при кручении

Из формулы для определения напряжений и эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что максимальные напряжения возникают на поверхности.

Определим максимальное напряжение, учитывая, что $\rho_{\max} = d/2$, где d — диаметр бруса круглого сечения.

Для круглого сечения полярный момент инерции рассчитывается по формуле (см. лекцию 25).

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Максимальное напряжение возникает на поверхности, поэтому имеем

$$\tau_к^{\max} = \frac{M_к d/2}{\mathcal{J}_p}.$$

Обычно $\mathcal{J}_p/\rho_{\max}$ обозначают W_p и называют *моментом сопротивления* при кручении, или *полярным моментом сопротивления* сечения

$$W_p = \frac{\mathcal{J}_p}{\rho_{\max}}.$$

9060

Таким образом, для расчета *максимального напряжения на поверхности* круглого бруса получаем формулу

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}.$$

Для круглого сечения $W_p = \dfrac{\pi d^4 2}{32d} = \dfrac{\pi d^3}{16}$; $\quad W_p \approx 0{,}2d^3$.

Для кольцевого сечения $W_p = \dfrac{\pi d^3}{16}(1 - c^4)$, где $c = \dfrac{d_{\text{вн}}}{d}$.

Условие прочности при кручении

Разрушение бруса при кручении происходит с поверхности, при расчете на прочность используют условие прочности

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}],$$

где $[\tau_{\text{к}}]$ — допускаемое напряжение кручения.

Виды расчетов на прочность

Существует три вида расчетов на прочность:

1. ***Проектировочный расчет*** — определяется диаметр бруса (вала) в *опасном сечении*:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{0{,}2d^3} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

Откуда

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{M_{\text{к}}}{0{,}2[\tau_{\text{к}}]}}.$$

2. ***Проверочный расчет*** — проверяется выполнение условия прочности

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

3. ***Определение нагрузочной способности*** (максимального крутящего момента)

$$[M_{\text{к}}] = [\tau_{\text{к}}]W_p.$$

Расчет на жесткость

При расчете на жесткость определяется деформация и сравнивается с допускаемой. Рассмотрим деформацию круглого бруса над действием внешней пары сил с моментом m (рис. 27.4).

При кручении деформация оценивается углом закручивания:

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R} \quad \text{(см. лекцию 26).}$$

Здесь φ — угол закручивания; γ — угол сдвига; l — длина бруса; R — радиус; $R = d/2$. Откуда

$$\gamma = \frac{\varphi R}{l}.$$

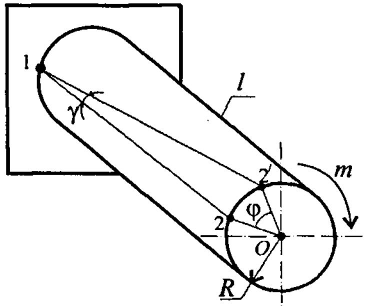


Рис. 27.4

Закон Гука имеет вид $\tau_к = G\gamma$.

Подставим выражение для γ, получим

$$\tau_к = G\frac{\varphi d/2}{l}; \text{ используем } \tau_к = \frac{M_к d/2}{\mathcal{J}_p},$$

откуда

$$\varphi = \frac{\tau_к l}{Gd/2} = \frac{M_к l}{G\mathcal{J}_p}.$$

Произведение $G\mathcal{J}_p$ называют жесткостью сечения.

Модуль упругости можно определить как $G \cong 0{,}4E$. Для стали $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Обычно рассчитывается угол закручивания, приходящийся на один метр длины бруса (вала) φ_0.

Условие жесткости при кручении можно записать в виде

$$\varphi_0 = \frac{M_к}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0],$$

где φ_0 — относительный угол закручивания, $\varphi_0 = \varphi/l$;

$[\varphi_0] \approx 1$ град/м $= 0{,}02$ рад/м — допускаемый относительный угол закручивания.

Примеры решения задач

Из расчетов на прочность и жесткость определить потребный диаметр вала для передачи мощности 63 кВт при скорость 30 рад/с. Материал вала — сталь, допускаемое напряжение при кручении 30 МПа; допускаемый относительный угол закручивания $[\varphi_0] = 0{,}02$ рад/м; модуль упругости при сдвиге $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

1. Определение размеров поперечного сечения из расчета на прочность.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\text{к}}^{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}].$$

Определяем вращающий момент из формулы мощности при вращении:

$$M_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{рад/с}}\right]; \quad M_{\text{вр}} = \frac{63 \cdot 10^3}{30} = 2{,}1 \cdot 10^3\,\text{Н} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{вр}} = M_{\text{к}}.$$

Из условия прочности определяем момент сопротивления вала при кручении

$$W_p \geqslant M_{\text{к}}/[\tau_{\text{к}}].$$

Значения подставляем в ньютонах и мм.

$$W_p \geqslant \frac{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{30} = 7 \cdot 10^4\,\text{мм}^3.$$

Определяем диаметр вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}}; \quad d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7 \cdot 10^4}{3{,}14}} = 71\,\text{мм}.$$

2. Определение размеров поперечного сечения из расчета на жесткость.

Условие жесткости при кручении:

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{к}}}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0].$$

Из условия жесткости определяем момент инерции сечения при кручении:

$$\mathcal{J}_p \geqslant \frac{M_\text{к}}{G[\varphi_0]}; \quad \mathcal{J}_p \geqslant \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3}}; \quad \mathcal{J}_p \geqslant 1312{,}5 \cdot 10^3\,\text{мм}^4.$$

Определяем диаметр вала:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\mathcal{J}_p}{\pi}}; \quad d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1312{,}5 \cdot 10^3}{3{,}14}} = 60{,}2\,\text{мм}.$$

3. Выбор потребного диаметра вала из расчетов на прочность и жесткость.

Для обеспечения прочности и жесткости одновременно из двух найденных значений выбираем большее.

Полученное значение следует округлить, используя ряд предпочтительных чисел. Практически округляем полученное значение так, чтобы число заканчивалось на 5 или 0. Принимаем значение $d_\text{вала} = 75\,\text{мм}$.

Для определения диаметра вала желательно пользоваться стандартным рядом диаметров, приведенном в Приложении 2.

Контрольные вопросы и задания

1. Как называется напряженное состояние, возникающее при кручении круглого бруса (вала)?

2. Напишите закон Гука при сдвиге.

3. Чему равен модуль упругости материала при кручении для стали? В каких единицах он измеряется?

4. Какая связь между углом сдвига и углом закручивания?

5. Как распределяется касательное напряжение при кручении? Чему равно напряжение в центре круглого поперечного сечения?

6. Напишите формулу для расчета напряжения в любой точке поперечного сечения.

7. Что такое полярный момент инерции? Какой физический смысл имеет эта величина? В каких единицах измеряется?

Напишите формулу для расчета полярного момента инерции для круга.

8. Напишите формулу для расчета напряжения на поверхности вала при кручении. Как изменится напряжение, если диаметр вала увеличится в два раза?

9. Почему для деталей, работающих на кручение, выбирают круглое поперечное сечение?

10. В чем заключается расчет на прочность?

11. В чем заключается расчет на жесткость?

12. По величине допускаемых крутящих моментов сравнить несущую способность двух валов из одинакового материала, имеющих примерно одинаковую площадь поперечных сечений $c = 0{,}55$ (рис. 27.5). Сравнение провести по формуле $[M_к] = [\tau_к]W_p$.

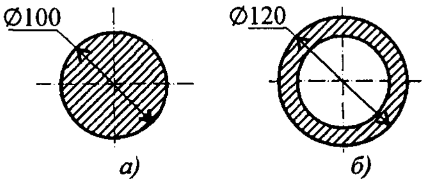
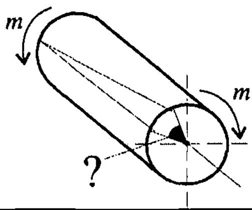


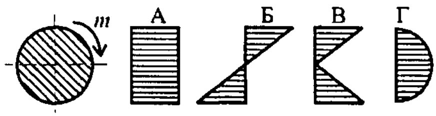
Рис. 27.5

13. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 2.5. Кручение

Вопросы	Ответы	Код
1. Какими буквами принято обозначать деформацию при кручении? 	γ	1
	Δl	2
	φ	3
	δ	4

Продолжение

Вопросы	Ответы	Код
2. Выбрать пропущенную величину в законе Гука при сдвиге $\tau = \boxed{}\,\gamma$	μ	1
	E	2
	G	3
	W_p	4
3. Как распределяется напряжение в поперечном сечении бруса при кручении? 	А	1
	Б	2
	В	3
	Г	4
4. Как изменится максимальное напряжение в сечении при кручении, если диаметр бруса уменьшится в 3 раза?	Уменьшится в 3 раза	1
	Уменьшится в 9 раз	2
	Увеличится в 9 раз	3
	Увеличится в 27 раз	4
5. Образец диаметром 40 мм разрушился при крутящем моменте 230 Н·м. Определить разрушающее напряжение.	6,75 МПа	1
	18 МПа	2
	21,25 МПа	3
	32,75 МПа	4

ЛЕКЦИЯ 28

Тема 2.5. Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Иметь представление о рациональных формах поперечного сечения и рациональном расположении колес на валу.

Знать условия прочности и жесткости при кручении.

Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты круглого бруса для статически определимых систем.

Примеры решения задач

Пример 1. Для заданного бруса (рис. 28.1) построить эпюры крутящих моментов, рациональным расположением шкивов на валу добиться уменьшения значения максимального крутящего момента. Построить эпюру крутящих моментов при рациональном расположении шкивов.

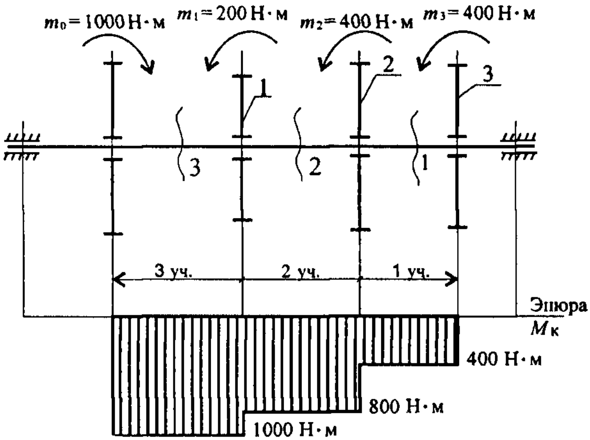


Рис. 28.1

Из условия прочности определить диаметры вала для сплошного и кольцевого сечений, приняв $c = \dfrac{d_{вн}}{d} = 0{,}5$. Сравнить полученные результаты по полученным площадям поперечных сечений. $[\tau_к] = 35$ МПа.

Решение

1. Пользуясь методом сечений, определяем крутящие моменты на участках вала (рис. 28.2).

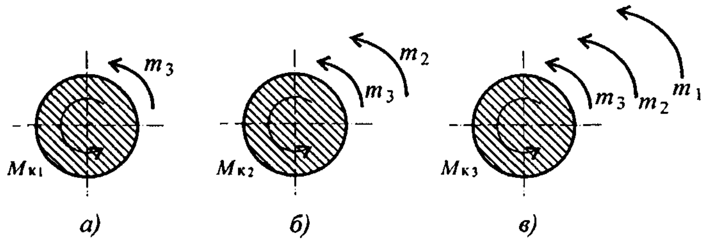


Рис. 28.2

Сечение 1 (рис. 28.2а): $M_{к1} = m_3 = 400$ Н·м.

Сечение 2 (рис. 28.2б): $M_{к2} = m_3 + m_2 = 800$ Н·м.

Сечение 3 (рис. 28.2в): $M_{к3} = m_3 + m_2 + m_1 = 1000$ Н·м.

2. Строим эпюру крутящих моментов. Значения крутящих моментов откладываем вниз от оси, т. к. моменты отрицательные.

Максимальное значение крутящего момента на валу в этом случае 1000 Н·м (рис. 28.1).

3. Выберем рациональное расположение колес на валу. Наиболее целесообразно такое размещение колес, при котором наибольшие положительные и отрицательные значения крутящих моментов на участках будут по возможности одинаковыми. Из этих соображений ведущий шкив, передающий момент 1000 Н·м, помещаем ближе к центру вала, ведомые шкивы 1 и 2 размещаем слева от ведущего с моментом 1000 Н·м, шкив 3 остается на том же мес-

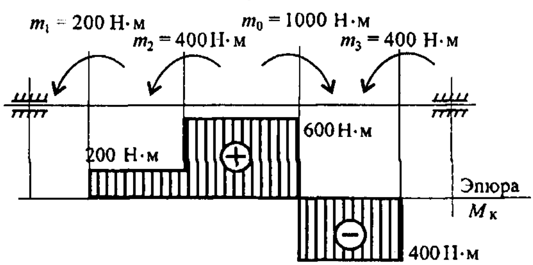


Рис. 28.3

те. Строим эпюру крутящих моментов при выбранном расположении шкива (рис. 28.3).

Максимальное значение крутящего момента на валу при выбранном расположении колес на валу 600 Н·м.

4. Определяем диаметры вала по сечениям при условии, что сечение — круг.

Условие прочности при кручении $\tau_к = M_к/W_p \leqslant [\tau_к]$.

Момент сопротивления кручению

$$W_p \geqslant \frac{M_к}{[\tau_к]}.$$

$$W_{p_1} = \frac{400 \cdot 10^3}{35} = 11{,}4 \cdot 10^3\,мм^3;$$

$$W_{p_2} = \frac{600 \cdot 10^3}{35} = 17{,}1 \cdot 10^3\,мм^3;$$

$$W_{p_3} = \frac{200 \cdot 10^3}{35} = 5{,}7 \cdot 10^3\,мм^3.$$

Определяем диаметры вала по сечениям:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}}.$$

$$d_1 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 11{,}4}{3{,}14}} = 38{,}8\,мм;$$

$$d_2 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 17{,}1}{3{,}14}} = 44{,}25\,мм;$$

$$d_3 = 10\sqrt{\frac{16 \cdot 5{,}6}{3{,}14}} = 31\,мм.$$

Округляем полученные значения: $d_1 = 40$ мм; $d_2 = 45$ мм; $d_3 = 35$ мм.

5. Определяем диаметры вала по сечениям при условии, что сечение — кольцо.

Моменты сопротивления остаются теми же.

По условию $c = d_{вн}/d = 0{,}5$.

Полярный момент сопротивления кольца

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4).$$

Формула для определения наружного диаметра вала кольцевого сечения будет следующей:

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi(1-c^4)}}.$$

Расчет можно провести по формуле

$$d' = d\sqrt[3]{\frac{1}{(1-c^4)}}.$$

Диаметры вала по сечениям:

$$d_1' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 11{,}4}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 39{,}6\,\text{мм};$$

$$d_2' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 17{,}1}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 45{,}2,\text{мм};$$

$$d_3' = 10\sqrt[3]{\frac{16\cdot 5{,}6}{3{,}14(1-0{,}5^4)}} = 32\,\text{мм}.$$

Наружные диаметры вала кольцевого сечения практически не изменились.

Для кольцевого сечения: $d_1' = 40$ мм; $d_2' = 46$ мм; $d_3' = 35$ мм.

6. Для вывода об экономии металла при переходе на кольцевое сечение сравним площади сечений (рис. 28.4).

При условии, что сечение — круг (рис. 28.4а):

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

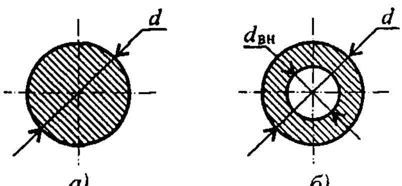


Рис. 28.4

Сплошное круглое сечение:

$$A_1 = \frac{3{,}14\cdot 40^2}{4} = 1256\,\text{мм}^2;$$

$$A_2 = \frac{3{,}14\cdot 45^2}{4} = 1590\,\text{мм}^2;$$

$$A_3 = \frac{3{,}14 \cdot 35^2}{4} = 962\,\text{мм}^2.$$

При условии, что сечение — кольцо, $c = d_{\text{вн}}/d_1 = 0{,}5$ (рис. 28.4б):

$$A' = \frac{\pi d'^2}{4} - \frac{\pi d_{\text{вн}}^2}{4} = \frac{\pi d'^2}{4}(1 - c^2).$$

Кольцевое сечение:

$$A_1' = \frac{3{,}14 \cdot 40^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 942\,\text{мм}^2;$$

$$A_2' = \frac{3{,}14 \cdot 46^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 1246\,\text{мм}^2;$$

$$A_3' = \frac{3{,}14 \cdot 35^2}{4}(1 - 0{,}5^2) = 729\,\text{мм}^2.$$

Сравнительная оценка результатов:

$$\frac{A_1}{A_1'} \cong \frac{A_2}{A_2'} \cong \frac{A_3}{A_3'} = 1{,}3.$$

Следовательно, при переходе с кругового на кольцевое сечение экономия металла по весу составит 1,3 раза.

Пример 2. Стальной вал диаметром 40 мм передает мощность 15 кВт при угловой скорости 80 рад/с (рис. 28.5); проверить прочность и жесткость вала, если допускаемое напряжение кручения 20 МПа. Модуль упругости при сдвиге $0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. Допускаемый угол закручивания $[\varphi_0] = 0{,}6$ град/м. Построить эпюру касательных напряжений и определить значение касательного напряжения в точке, удаленной на 5 мм от оси вала.

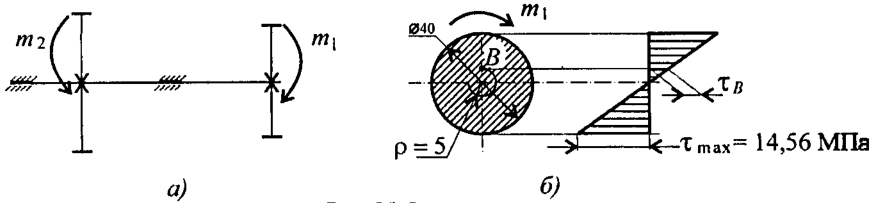


Рис. 28.5

Решение

1. Определяем вращающий момент на валу:

$$M_{\text{вр}} = \frac{P}{\omega}; \quad M_{\text{вр}} = \frac{15 \cdot 1000}{80} = 187{,}5\,\text{Н} \cdot \text{м}.$$

2. Проверка прочности вала.

Из условия равновесия $m_1 + m_2 = 0$; $m_1 = m_2 = M_{\text{к}}$.

Условие прочности:

$$\tau_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \leqslant [\tau_{\text{к}}],$$

где $\tau_{\text{к}}$ — расчетное напряжение в сечении; $M_{\text{к}}$ — крутящий момент в сечении; W_p — момент сопротивления; $[\tau_{\text{к}}]$ — допускаемое напряжение кручения.

3. $\tau_{\text{к}} = \dfrac{187{,}5 \cdot 10^3}{12\,800} = 14{,}65\,\text{МПа}$.

$W_p = 0{,}2d^3 = 0{,}2 \cdot 40^3 = 12\,800\,\text{мм}^3$.

4. Прочность обеспечена. Максимальное касательное напряжение в сечении $14{,}65\,\text{МПа} < 20\,\text{МПа}$.

5. Проверка жесткости.

Условие жесткости:

$$\varphi_0 = \frac{M_{\text{к}}}{G\mathcal{J}_p} \leqslant [\varphi_0],$$

где φ_0 — относительный угол закручивания; $\mathcal{J}_p$ — полярный момент инерции при кручении; $[\varphi_0]$ — допускаемый угол закручивания.

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4.$$

$$\mathcal{J}_p = 0{,}1 \cdot 40^4 = 256 \cdot 10^3\,\text{мм}^4.$$

$$\varphi_0 = \frac{187{,}5 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 256 \cdot 10^3} = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{рад/мм}.$$

Угол закручивания участка $\varphi_0 = 9 \cdot 10^{-6}\,\text{рад/мм} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{рад/м}$.

$$[\varphi_0] = 0{,}6\,\text{град/м} \approx 0{,}01\,\text{рад/м} > 0{,}009\,\text{рад/м}.$$

Жесткость обеспечена.

6. Построим эпюру касательных напряжений в поперечном сечении (рис. 28.5б). Определим напряжение в точке, удаленной на 5 мм от оси вала.

$$\tau/\rho = \tau_{\max}/\tau_B.$$

$\tau_{\max} = 14{,}65$ МПа.

$$\frac{20}{5} = \frac{14{,}65}{\tau_B}; \quad \tau_B = \frac{14{,}65 \cdot 5}{20} \cong 3{,}66\,\text{МПа}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Определите крутящий момент в сечении 2–2 (рис. 28.6).

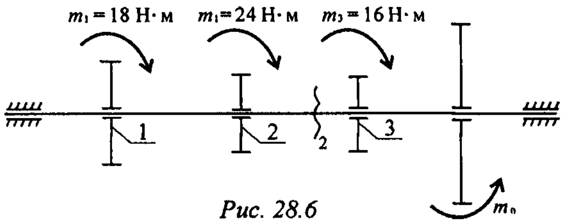


Рис. 28.6

2. В каком порядке рациональнее расположить шкивы, чтобы получить минимальную нагрузку на вал? Использовать схему рис. 28.6.

3. Как изменится напряжение в сечении, если диаметр вала уменьшить в два раза?

4. Проведены расчеты вала на прочность и жесткость. Получено: диаметр вала из расчета на прочность 65 мм, диаметр вала из расчета на жесткость 70 мм. Каким должен быть вал?

5. Как изменится угол закручивания вала, если крутящий момент увеличить в 4 раза, а диаметр уменьшить в 2 раза?

6. Напишите условия прочности и жесткости при кручении.