ЛЕКЦИЯ 23

# Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие. Основные предпосылки расчетов и расчетные формулы

*Иметь представление об основных предпосылках и условностях расчетов о деталях, работающих на срез и смятие.*

*Знать внутренние силовые факторы, напряжения и деформации при сдвиге и смятии, условия прочности.*

*Уметь определять площади среза и смятия.*

Детали соединений (болты, штифты, шпонки, заклепки) работают так, что можно учитывать только один внутренний силовой фактор — поперечную силу. Такие детали рассчитываются на сдвиг.

## Сдвиг (срез)

*Сдвигом* называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — поперечная сила.

Рассмотрим брус, на который действуют равные по величине, противоположно направленные, перпендикулярные продольной оси силы (рис. 23.1).

Применим метод сечений и определим внутренние силы упругости из условия равновесия каждой из частей бруса:

$$\sum F_y = 0; \quad F - Q = 0; \quad F = Q,$$

где $Q$ — поперечная сила. Естественно считать, что она вызовет появление только касательных напряжений $\tau$.

Рассмотрим напряженное состояние в точке $B$ поперечного сечения.

Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены напряжения (рис. 23.2).

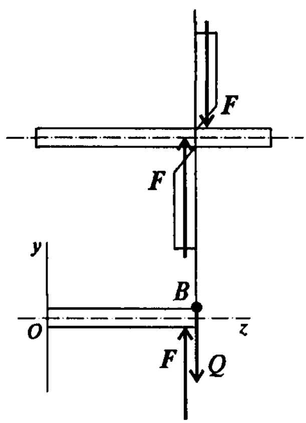



*Рис. 23.1*

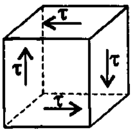


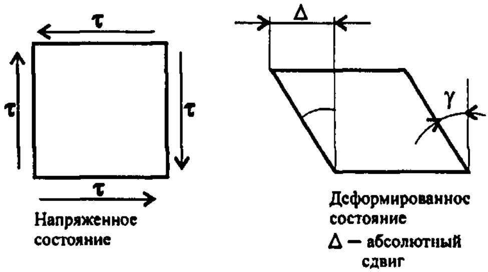

*Рис. 23.2*

Исходя из условия равновесия точки $B$, внутри бруса при возникновении касательного напряжения $\tau$ на правой вертикальной площадке такое же напряжение должно возникнуть и на левой площадке. Они образуют пару сил. На горизонтальных площадках возникнут такие же напряжения, образующие такую же пару обратного направления (рис. 23.3).

Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Здесь действует *закон парности касательных напряжений:*

*При сдвиге в окрестностях точки на взаимно перпендикулярных площадках возникают равные по величине касательные напряжения, направленные на соседних площадках либо от ребра, либо к ребру* (рис. 23.3а).

В результате площадки сдвигаются на угол $\gamma$, называемый *углом сдвига.*




*а) Рис. 23.3 б)*

При сдвиге выполняется закон Гука, который в данном случае записывается следующим образом: $\tau = G\gamma$.

Здесь $\tau$ — напряжение; $G$ — модуль упругости сдвига; $\gamma$ — угол сдвига.

При отсутствии специальных испытаний $G$ можно рассчитать по формуле $G \cong 0{,}4E$, $E$ — модуль упругости при растяжении. $[G]$ = МПа.

Расчет деталей на сдвиг носит условный характер.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

— при расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается, хотя силы, действующие на деталь, образуют пару;

— при расчете считаем, что силы упругости распределены по сечению равномерно;

— если для передачи нагрузки используют несколько деталей, считаем, что внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Откуда формула для расчета напряжений имеет вид:

$$\tau_{\text{c}} = \frac{Q}{A_{\text{c}}}; \quad Q = \frac{F}{z},$$

где $\tau_{\text{c}}$ — касательное напряжение; $Q$ — поперечная сила; $A_{\text{c}}$ — площадь сдвига; $F$ — внешняя сдвигающая сила; $z$ — количество деталей.

***Условие прочности при сдвиге (срезе)***

$$\tau_{\text{c}} = \frac{Q}{A_{\text{c}}} \leqslant [\tau_{\text{c}}],$$

$[\tau_{\text{c}}]$ — допускаемое напряжение сдвига, обычно его определяют по формуле

$$[\tau_{\text{c}}] = (0{,}25 \div 0{,}35)\sigma_{\text{т}}.$$

При разрушении деталь перерезается поперек. Разрушение детали под действием поперечной силы называют срезом.

## Смятие

Довольно часто одновременно со сдвигом происходит смятие боковой поверхности в месте контакта в результате передачи нагрузки от одной поверхности к другой. При этом на поверхности возникают сжимающие напряжения, называемые *напряжениями смятия*, $\sigma_{\text{см}}$.

Расчет также носит условный характер. Допущения подобны принятым при расчете на сдвиг (см. выше), однако при расчете боковой цилиндрической поверхности напряжения по поверхности распределены *не равномерно*, поэтому расчет проводят для наиболее нагруженной точки (на рис. 23.4б). Для этого вместо боковой поверхности цилиндра в расчете используют плоскую поверхность, проходящую через диаметр. На рис. 23.4 показана примерная схема передачи давления на стержень заклепки.

Таким образом, условие прочности при смятии можно выразить соотношением

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leqslant [\sigma_{\text{см}}];$$

$A_{\text{см}} = d\delta$, где $d$ — диаметр окружности сечения; $\delta$ — наименьшая высота соединяемых пластин; $A_{\text{см}}$ — расчетная площадь смятия;

допускаемое напряжение смятия: $[\sigma_{см}] = (0{,}35 \div 0{,}4)\sigma_т$; $F$ — сил взаимодействия между деталями.

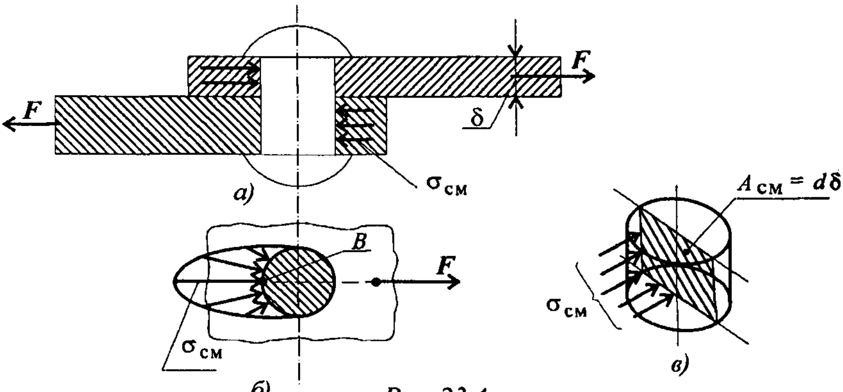



Рис. 23.4

## Примеры деталей, работающих на сдвиг (срез) и смятие

1. Ось (рис. 23.5).

В случае, если толщина детали 2 меньше, $A_{см} = d\delta$;

$A_с = \dfrac{\pi d^2}{4} i$; $i = 2$ — количество площадей среза.

2. Болт (рис. 23.6).

$$A_с = \pi d h; \quad A_{см} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2).$$

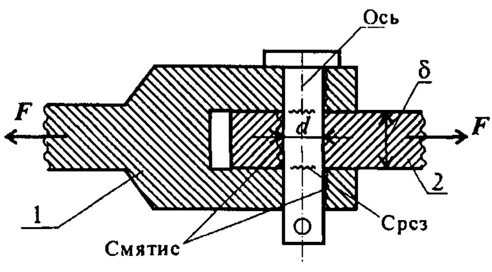



Рис. 23.5

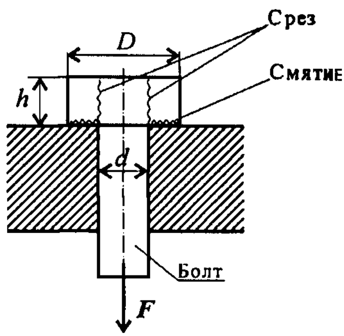



Рис. 23.6

3. Шпонки (рис. 23.7) работают на срез и смятие, но рассчитываются только на смятие.

$A_c = bl$; $A_{см} = lt$; где $l$ — длина шпонки; $t$ — высота выступающей части; $b$ — ширина шпонки.

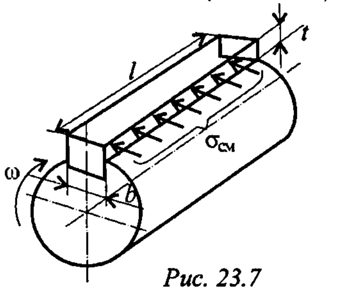



*Рис. 23.7*

4. Заклепка односрезная (рис. 23.8), двухсрезная (рис. 23.9).

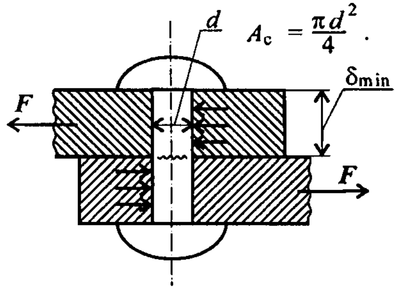



*Рис. 23.8*

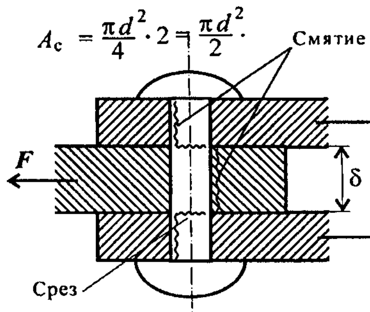



*Рис. 23.9*

5. Сварное соединение (рис. 23.10).

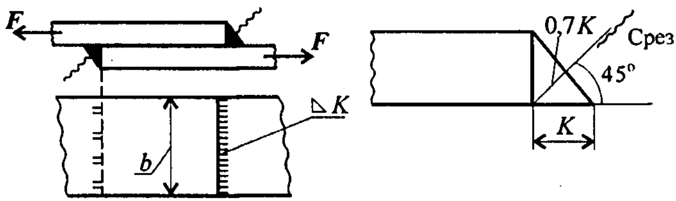



*Рис. 23.10*

Угловой шов разрушается под углом 45° к плоскости разъема в результате среза. $K$ — катет углового шва, подбирается по толщине свариваемого листа.

Двухсторонний шов: $A_c = 2 \cdot 0{,}7Kb$.

ЛЕКЦИЯ 24

# Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие

*Знать условия прочности при срезе и смятии.*
*Уметь проводить расчеты на срез и смятие.*

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить потребное количество заклепок для передачи внешней нагрузки 120 кН. Заклепки расположить в один ряд. Проверить прочность соединяемых листов. Известно: $[\sigma] = 160$ МПа; $[\sigma_{см}] = 300$ МПа; $[\tau_с] = 100$ МПа; диаметр заклепок 16 мм.

### *Решение*

1. Определить количество заклепок из расчета на сдвиг (рис. 24.1).

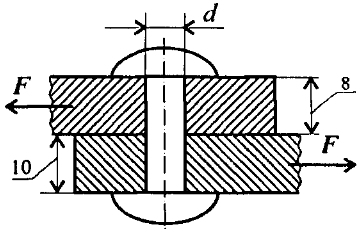



*Рис. 24.1*

Условие прочности на сдвиг:

$$\tau_с = \frac{Q}{A_с} \leqslant [\tau_с]; \quad Q = \frac{F}{z};$$

$$\tau_с = \frac{F}{zA_с} \leqslant [\tau_с],$$

где $A_с = \pi r^2$;
$z$ — количество заклепок.

Откуда $z \geqslant \dfrac{F}{A_с[\tau_с]}$; $z = \dfrac{120 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 100} = 5{,}97 \approx 6.$

Таким образом, необходимо 6 заклепок.

2. Определить количество заклепок из расчета на смятие.

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F'}{A_{см}} \leqslant [\sigma_{см}]; \quad F' = \frac{F}{z}; \quad z \geqslant \frac{F}{A_{см}[\sigma_{см}]},$$

$A_{см} = d\delta_{\min}$; $F'$ — нагрузка на одну заклепку.

$$\text{Откуда} \quad z \geqslant \frac{120 \cdot 10^3}{8 \cdot 16 \cdot 300} = 3{,}12.$$

Таким образом, необходимо 4 заклепки.

*Для обеспечения прочности на сдвиг (срез) и смятие необходимо 6 заклепок.*

Для удобства установки заклепок расстояние между ними и от края листа регламентируется. Шаг в ряду (расстояние между центрами) заклепок $3d$; расстояние до края $1{,}5d$. Следовательно, для расположения шести заклепок диаметром 16 мм необходима ширина листа 288 мм. Округляем величину до 300 мм ($b = 300$ мм).

3. Проверим прочность листов на растяжение. Проверяем тонкий лист. Отверстия под заклепки ослабляют сечение, рассчитываем площадь листа в месте, ослабленном отверстиями (рис. 24.2):

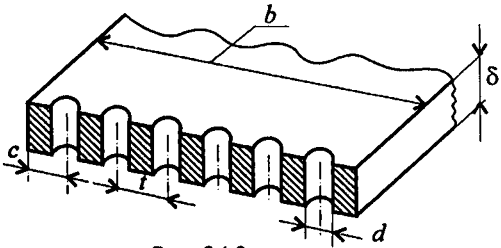



*Рис. 24.2*

$$A = (b - zd)\delta = (300 - 6 \cdot 16) \cdot 8 = 1632\,\text{мм}^2.$$

Условие прочности на растяжение:

$$\sigma_\text{р} = N/A \leqslant [\sigma_\text{р}]; \quad \sigma_\text{р} = \frac{120 \cdot 10^3}{1632} = 73{,}53\,\text{МПа}.$$

73,53 МПа < 160 МПа. Следовательно, прочность листа обеспечена.

**Пример 2.** Проверить прочность заклепочного соединения на срез и смятие. Нагрузка на соединение 60 кН, $[\tau_\text{c}] = 100$ МПа; $[\sigma_\text{см}] = 240$ МПа.

### *Решение*

1. Соединение двухсрезными заклепками последовательно воспринимается тремя заклепками в левом ряду, а затем тремя заклепками в правом ряду (рис. 24.3).

Площадь сдвига каждой заклепки $A_\text{c} = 2\pi r^2$.

Площадь смятия боковой поверхности $A_\text{см} = d\delta_{\min}$.

2. Проверим прочность соединения на сдвиг (срез).

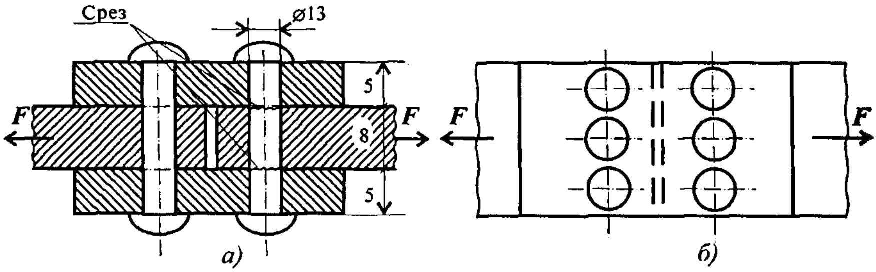



*Рис. 24.3*

$Q = F/z$ — поперечная сила в поперечном сечении заклепки:

$$\tau_c = \frac{F}{zA_c}; \quad \tau_c = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}5^2} = 75{,}4\,\text{МПа} < 100\,\text{МПа}.$$

Прочность на сдвиг обеспечена.

3. Проверим прочность соединения на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{zA_{см}}; \quad \sigma_{см} = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 13 \cdot 8} = 192{,}3\,\text{МПа} < 240\,\text{МПа}.$$

Прочность заклепочного соединения обеспечена.

**Пример 3.** Проверить прочность сварного соединения угловыми швами с накладкой. Действующая нагрузка 60 кН, допускаемое напряжение металла шва на сдвиг 80 МПа.

***Решение***

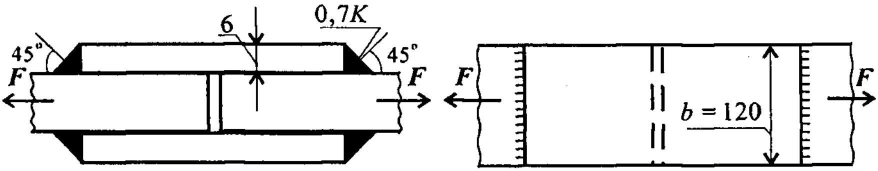
1. Нагрузка передается последовательно через два шва слева, а далее — два шва справа (рис. 24.4). Разрушение угловых швов происходит по площадкам, расположенным под углом 45° к поверхности соединяемых листов.

2. Проверим прочность сварного соединения на срез.

Двухсторонний угловой шов можно рассчитать по формуле

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leqslant [\tau_c],$$

где $Q = F$; $A_c = 2 \cdot 0{,}7\,Kb$, $A_c$ — расчетная площадь среза шва; $K$ — катет шва, равен толщине накладки; $b$ — длина шва.




*а)* *б)*

*Рис. 24.4*

Следовательно,

$$\tau_c = \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 6 \cdot 120} = 59{,}5\,\text{МПа},$$

59,5 МПа < 80 МПа. Расчетное напряжение меньше допускаемого, прочность обеспечена.

## Контрольные вопросы и задания

1. Какие внутренние силовые факторы возникают при сдвиге и смятии?
2. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
3. Как обозначается деформация при сдвиге?
4. Запишите закон Гука при сдвиге.
5. Какой физический смысл у модуля упругости?
6. Укажите единицы измерения напряжений сдвига и смятия и модуля упругости.
7. Как учесть количество деталей, использованных для передачи нагрузки при расчетах на сдвиг и смятие?
8. Запишите условия прочности на сдвиг и смятие.
9. Почему при расчете на смятие цилиндрических деталей вместо боковой цилиндрической поверхности подставляют плоскость, проходящую через диаметр?
10. Чем отличается расчет на прочность при сдвиге односрезной заклепки от двухсрезной?
11. Запишите формулу для расчета сварного соединения. Стержни круглого поперечного сечения сварены угловым швом (рис. 24.5).

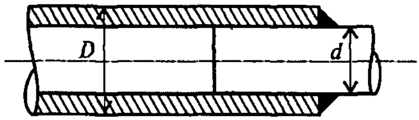
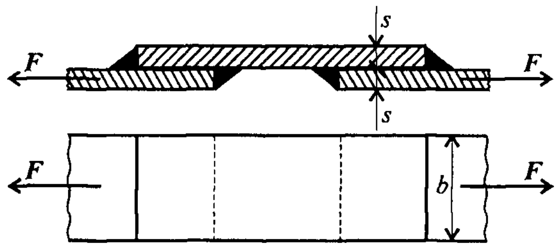



*Рис. 24.5*

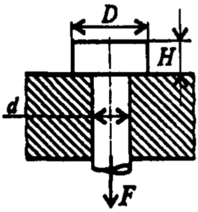
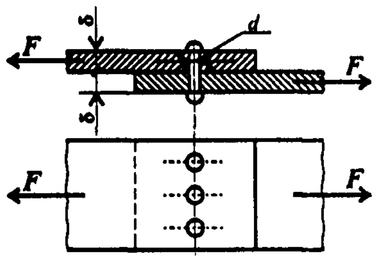
$$K = \frac{D - d}{2}.$$

12. Ответьте на вопросы тестового задания.

## Тема 2.3. Практические расчеты на срез и смятие

| Вопросы | Ответы | Код |
|---|---|---|
| 1. Сварное соединение выполнено угловыми швами с накладкой. $s = 10$ мм; $b = 120$ мм. Рассчитать суммарную площадь среза сварных швов при передаче силы $F$.   | 420 мм$^2$ | 1 |
| | 600 мм$^2$ | 2 |
| | 840 мм$^2$ | 3 |
| | 1680 мм$^2$ | 4 |
| 2. Выбрать формулу для расчета сварного соединения, изображенного на рисунке к вопросу 1, на прочность под действием внешней силы. | $\tau = \frac{Q}{A}$ | 1 |
| | $\sigma = \frac{F}{A}$; $F = Q$ | 2 |
| | $\tau = \frac{M}{W}$ | 3 |
| | $\sigma = \frac{N}{A}$ | 4 |

Продолжение

<table>
<tr><th>Вопросы</th><th>Ответы</th><th>Код</th></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Болт нагружен растягивающей силой, при этом возникает смятие головки болта. Рассчитать величину площади смятия болта при действии силы $F$, если $d = 20$ мм; $H = 14$ мм; $D = 36$ мм.<br><br></td><td>468 мм$^2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>224 мм$^2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1331 мм$^2$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>703 мм$^2$</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4. Из условия прочности болта на смятие определить величину допускаемой нагрузки $F$, если $[\tau_c] = 100$ МПа, $[\sigma_{см}] = 240$ МПа, использовать для расчета данные вопроса 3.</td><td>22,40 кН</td><td>1</td></tr>
<tr><td>84,3 кН</td><td>2</td></tr>
<tr><td>168,7 кН</td><td>3</td></tr>
<tr><td>70,3 кН</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5. Проверить прочность заклепочного соединения на срез, если $F = 80$ кН; $[\tau_c] = 100$ МПа; $[\sigma_{см}] = 240$ МПа; $d = 17$ мм; $\delta = 50$ мм; $z = 3$. $[\tau_c]$, $[\sigma_{см}]$ — допускаемые напряжения.<br><br></td><td>$\tau < [\tau_c]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\tau = [\tau_c]$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\tau > [\tau_c]$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Данных недостаточно</td><td>4</td></tr>
</table>

# ЛЕКЦИЯ 25

## Тема 2.4. Геометрические характеристики плоских сечений

*Иметь представление о физическом смысле и порядке определения осевых, центробежных и полярных моментов инерции, о главных центральных осях и главных центральных моментах инерции.*

*Знать формулы моментов инерции простейших сечений, способы вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей.*

При растяжении, сжатии, смятии и сдвиге деталь сопротивляется деформации всем сечением одинаково. Здесь геометрической характеристикой сечения является площадь.

При кручении и изгибе сечение сопротивляется деформации не одинаково, при расчетах напряжений появляются другие геометрические характеристики сечения, влияющие на сопротивления сечения деформированию.

### Статический момент площади сечения

Рассмотрим произвольное сечение (рис. 25.1).

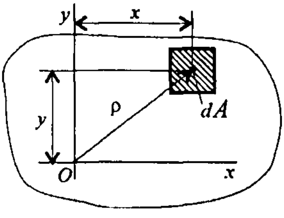



*Рис. 25.1*

Если разбить сечение на бесконечно малые площадки $dA$ и умножить каждую площадку на расстояние до оси координат и проинтегрировать полученное выражение, получим статический момент площади сечения:

1) относительно оси $Ox$ $S_x = \int\limits_A y\,dA$;

2) относительно оси $Oy$ $S_y = \int\limits_A x\,dA$.

Для симметричного сечения статические моменты каждой половины площади равны по величине и имеют разный знак. Следовательно, *статический момент относительно оси симметрии равен нулю.*

Статический момент используется при определении положения центра тяжести сечения:

$$x_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k x_k}{\sum\limits_0^n A_k}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_0^n A_k y_k}{\sum\limits_0^n A_k}; \quad \sum_0^n A_k y_k \approx \int\limits_A y\,dA.$$

Формулы для определения положения центра тяжести можно записать в виде

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

## Центробежный момент инерции

*Центробежным моментом инерции* сечения называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на обе координаты:

$$\mathcal{J}_{xy} = \int\limits_A xy\,dA.$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называют *главными центральными осями сечения.*

## Осевые моменты инерции

*Осевым моментом инерции* сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

1) осевой момент инерции сечения относительно оси $Ox$
$\mathcal{J}_x = \int\limits_A y^2\,dA;$

2) осевой момент инерции сечения относительно оси $Oy$
$\mathcal{J}_y = \int\limits_A x^2\,dA.$

## Полярный момент инерции сечения

*Полярным моментом инерции* сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$\mathcal{J}_p = \int_A \rho^2 \, dA,$$

где $\rho$ — расстояние до полюса (центра поворота) (рис. 25.1).

Поскольку $\rho^2 = x^2 + y^2$, получим: *полярный момент инерции сечения равен сумме осевых*:

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y.$$

Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

Полярный момент инерция характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции: м$^4$; см$^4$; мм$^4$.

## Моменты инерции простейших сечений

***Осевые моменты инерции прямоугольника*** (рис. 25.2)

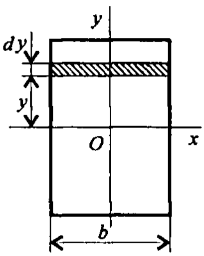


*Рис. 25.2*

Представим прямоугольник высотой $h$ и шириной $b$ в виде сечения, составленного из бесконечно тонких полос. Запишем площадь такой полосы $bdy = dA$. Подставим в формулу осевого момента инерции относительно оси $Ox$:

$$\mathcal{J}_x = \int_A by^2 \, dy = b \int_A y^2 \, dy;$$

$$\mathcal{J}_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = \frac{2bh^3}{2^3 \cdot 3}; \text{ получим: } \mathcal{J}_x = \frac{bh^3}{12}.$$

По аналогии, если разбить прямоугольник на вертикальные полосы, рассчитать площади полос и подставить в формулу для осевого момента инерции относительно оси $Oy$, получим:

$$\mathcal{J}_y = \int_A x^2\,dA = \frac{hb^3}{12}.$$

Очевидно, что при $h > b$ сопротивление повороту относительно оси $Ox$ больше, чем относительно $Oy$.

*Для квадрата*: $h = b$; $\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \dfrac{h^4}{12}$.

### *Полярный момент инерции круга*

Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем — осевые.

Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец (рис. 25.3).

Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца: $dA = 2\pi\rho\,d\rho$.

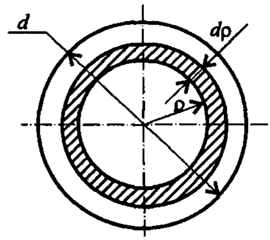


*Рис. 25.3*

Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции:

$$\mathcal{J}_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho\,d\rho = 2\pi\int_0^{d/2}\rho^3\,d\rho; \quad \mathcal{J}_p = \frac{2\pi d^4}{4\cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Получим формулу для расчета полярного момента инерции круга:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_{\text{вн}}^4),$$

где $d$ — наружный диаметр кольца; $d_{\text{вн}}$ — внутренний диаметр кольца.

Если обозначить $d_{\text{вн}}/d = c$, то

$$\mathcal{J}_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4).$$

***Осевые моменты инерции круга и кольца***

Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y; \quad \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\mathcal{J}_p}{2};$$

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (круг)}; \quad \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4) \text{ (кольцо)}.$$

## Моменты инерции относительно параллельных осей

Оси $Ox_0$ и $Ox$ параллельны (рис. 25.4).

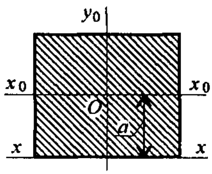


*Рис. 25.4*

При параллельном переносе прямоугольной системы осей $y_0Ox_0$ в новое положение $y_0Ox$ значения моментов инерции $\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$, $\mathcal{J}_{xy}$ заданного сечения меняются. Задается формула перехода без вывода.

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{x_0} + Aa^2,$$

здесь $\mathcal{J}_x$ — момент инерции относительно оси $Ox$;

$\mathcal{J}_{x_0}$ — момент инерции относительно оси $Ox_0$;

$A$ — площадь сечения;

$a$ — расстояние между осями $Ox$ и $Ox_0$.

## Главные оси и главные моменты инерции

*Главные оси* — это оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения: минимальный и максимальный.

Главные центральные моменты инерции рассчитываются относительно главных осей, проходящих через центр тяжести.

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить величину осевых моментов инерции плоской фигуры относительно осей $Ox$ и $Oy$ (рис. 25.5).

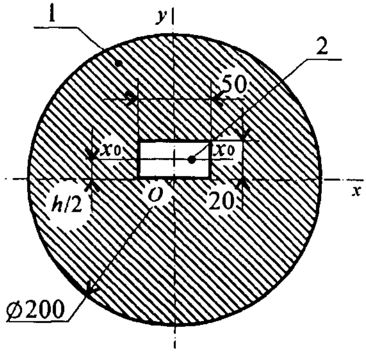



*Рис. 25.5*

## *Решение*

1. Определим осевой момент инерции относительно оси $Ox$. Используем формулы для главных центральных моментов. Представим момент инерции сечения как разность моментов инерции круга и прямоугольника.

Для круга $\mathcal{J}_{x_1} = \dfrac{\pi d^4}{64}$.

Для прямоугольника $\mathcal{J}_{x_{02}} = \dfrac{bh^3}{12}$.

Для прямоугольника ось $Ox$ не проходит через ЦТ.

Момент инерции прямоугольника относительно оси $Ox$:

$$\mathcal{J}_{x_2} = \mathcal{J}_{x_{02}} + a^2 A,$$

где $A$ — площадь сечения; $a$ — расстояние между осями $Ox$ и $Ox_0$.

$$\mathcal{J}_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

Момент инерции сечения

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{x_1} - \mathcal{J}_{x_2}, \quad \mathcal{J}_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{3};$$

$$\mathcal{J}_x = \frac{3{,}14 \cdot 2^4 \cdot 10^8}{64} - \frac{50 \cdot 2^3 \cdot 10^3}{3} = 783{,}7 \cdot 10^5\,\text{мм}^4; \quad \mathcal{J}_x = 7837\,\text{см}^4.$$

2. Осевой момент инерции относительно оси $Oy$:

$$\mathcal{J}_{y_1} = \mathcal{J}_{x_1} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ — круг}; \quad \mathcal{J}_{y_2} = \frac{hb^3}{12} \text{ — прямоугольник.}$$

Момент инерции сечения

$$\mathcal{J}_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad \mathcal{J}_y = \frac{3{,}14 \cdot 200^4}{64} - \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 760 \cdot 10^5\,\text{мм}^4;$$

$$\mathcal{J}_y = 7600\,\text{см}^4.$$

**Пример 2.** Найти главный центральный момент инерции сечения относительно оси $Ox$ (рис. 25.6).

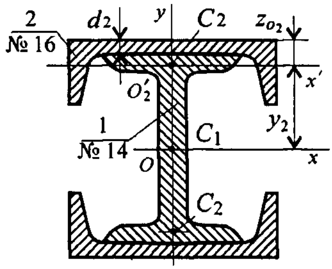



*Рис. 25.6*

***Решение***

1. Сечение составлено из стандартных профилей, главные центральные моменты инерции которых приводятся в таблицах ГОСТ, см. Приложение 1.
Для двутавра № 14 по ГОСТ 8239–89 $\mathcal{J}_{Ox_1} = 572\,\text{см}^4$.
Для швеллера № 16 по ГОСТ 8240–89 $\mathcal{J}_{Ox_2} = 757\,\text{см}^4$.
Площадь $A_2 = 18{,}1\,\text{см}^2$, $\mathcal{J}_{Oy_2} = 63{,}3\,\text{см}^4$

2. Определяем координату центра тяжести швеллера относительно оси $Ox$. В заданном сечении швеллер повернут и поднят. При этом главные центральные оси поменялись местами.
$y_2 = (h_1/2) + d_2 - z_{O_2}$; по ГОСТ находим $h_1 = 14$ см; $d_2 = 5$ мм; $z_O = 1{,}8$ см.

3. Момент инерции сечения равен сумме моментов инерции швеллеров и двутавра относительно оси $Ox$. Используем формулу моментов инерции относительно параллельных осей:

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_{Ox_1} + 2(\mathcal{J}'_{Ox_2} + y_2^2 A).$$

В данном случае $\mathcal{J}'_{Ox_2} = \mathcal{J}_{Oy_2} = 63{,}3\,\text{см}^4$;
$y_2 = (14/2) + 0{,}5 - 1{,}8 = 5{,}7\,\text{см}$ (расстояние между осями координат $Ox'$ и $Ox$);

$$\mathcal{J}_x = 572 + 2(63{,}3 + 5{,}7^2 \cdot 18{,}1) = 1874{,}7\,\text{см}^4.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Диаметр сплошного вала увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличатся осевые моменты инерции? ($\mathcal{J}_x = \dfrac{\pi d^4}{32}$.)

2. Осевые моменты сечения равны соответственно $\mathcal{J}_x = 2{,}5$ мм и $\mathcal{J}_y = 6{,}5$ мм. Определите полярный момент сечения.

3. Осевой момент инерции кольца относительно оси $Ox$ $\mathcal{J}_x = 4\,\text{см}^4$. Определите величину $\mathcal{J}_p$.

4. В каком случае $\mathcal{J}_x$ наименьшее (рис. 25.7)?

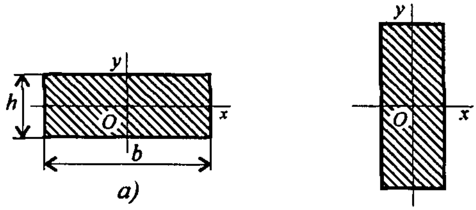



*Рис. 25.7*

5. Какая из приведенных формул для определения $\mathcal{J}_x$ подойдет для сечения, изображенного на рис. 25.8?

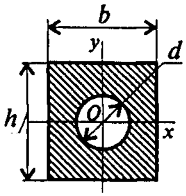



*Рис. 25.8*

Варианты ответа:

1. $\dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{bh^3}{4}$.
2. $\dfrac{bh^3}{12} - \dfrac{\pi d^4}{64}$;
3. $\dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{\pi d^4}{32}$;
4. $\dfrac{\pi d^4}{32} - \dfrac{bh^3}{12}$.

6. Момент инерции швеллера № 10 относительно главной центральной оси $\mathcal{J}_{x_0} = 174\,\text{см}^4$; площадь поперечного сечения 10,9 $\text{см}^2$.

Определите осевой момент инерции относительно оси, проходящей через основание швеллера (рис. 25.9).

7. Сравнить полярные моменты инерции двух сечений, имеющих практически одинаковые площади (рис. 25.10).

8. Сравнить осевые моменты инерции относительно оси $Ox$ прямоугольника и квадрата, имеющих одинаковые площади (рис. 25.11).

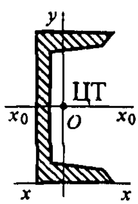



*Рис. 25.9*

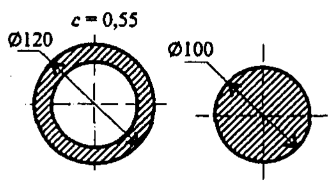



*Рис. 25.10*

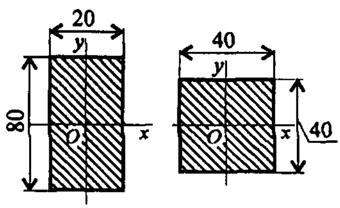



*Рис. 25.11*