

## 8. ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

### 8.1. Основные понятия и определения

Брус с прямой осью, как мы уже знаем, называется стержнем.

**Изгиб** – это такой вид нагружения (деформации) бруса, при котором в его поперечных сечениях действуют изгибающие моменты.

Стержни, работающие на изгиб, называют **балками**.

В большинстве случаев **одновременно** с изгибающим моментом возникают и поперечные силы. Такой вид изгиба называют **поперечным**; если же в сечениях действуют **только изгибающие моменты**, то такой вид изгиба называют **чистым** (рис. 8.1).

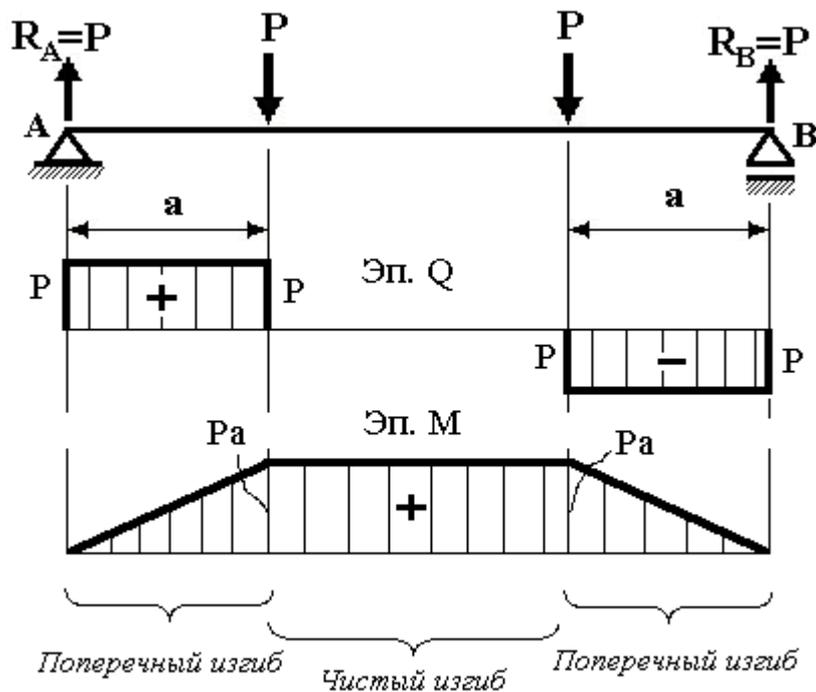


Рис. 8.1. Чистый и поперечный изгиб балки

Если плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных плоскостей инерции поперечного сечения, изгиб называют **плоским** или **прямым**. Если упомянутое условие не выполняется – изгиб **косой** (будем рассматривать во второй части курса).

При **плоском** изгибе ось балки и после деформации остается в плоскости действия внешних сил – в **силовой плоскости**.

Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется **силовой линией** (рис. 8.2).

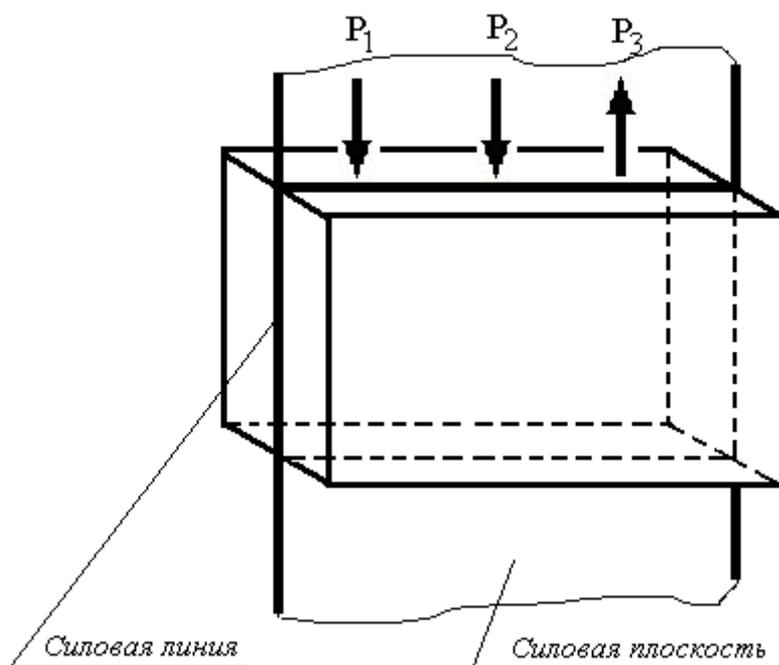


Рис. 8.2. Силовая плоскость при плоском изгибе

С видами нагрузок, типами опор, видами балок и определением внутренних силовых факторов мы познакомились ранее.

При изучении изгиба будем рассматривать лишь **такие балки, сечения которых имеют одну или две оси симметрии, а действующие внешние силы лежат в одной из плоскостей симметрии**. На данном этапе изучения изгиба будем рассматривать **плоский чистый и плоский поперечный изгиб** балок.

## 8.2. Плоский чистый изгиб

**8.2.1. Особенности деформирования балок.** Исследуем поведение балки при плоском чистом изгибе.

Как было сказано выше, в поперечных сечениях балки возникают только изгибающие моменты.

Рассмотрим балку, прямоугольного поперечного сечения (рис. 8.3).

Проведем до нагружения балки на ее боковой поверхности близко друг к другу две линии  $kn$  и  $k_1n_1$ , перпендикулярные к оси балки. Это будут два сечения, отстоящие друг от друга на расстоянии  $dz$ . Проведем между этими сечениями линии  $ab$  и  $cd$ , параллельные оси балки:

$cd$  – ближе к верхнему слою,  $ab$  – к нижнему слою.

До деформации  $ab = cd = dz$ .

Нагрузим балку сосредоточенными моментами  $m$ . Геометрический анализ показывает, что после деформации:

- а) прямые  $kn$  и  $k_1n_1$  **остались прямыми**, только наклонились друг к другу;
- б) отрезок  $ab$  – **удлинился**, а отрезок  $cd$  – **укоротился**;
- в) исходя из предыдущих двух выводов, где-то по высоте сечения будет располагаться отрезок, длина которого **не изменилась**;
- г) **ширина балки в сжатой зоне увеличилась**, а **в растянутой – уменьшилась**.

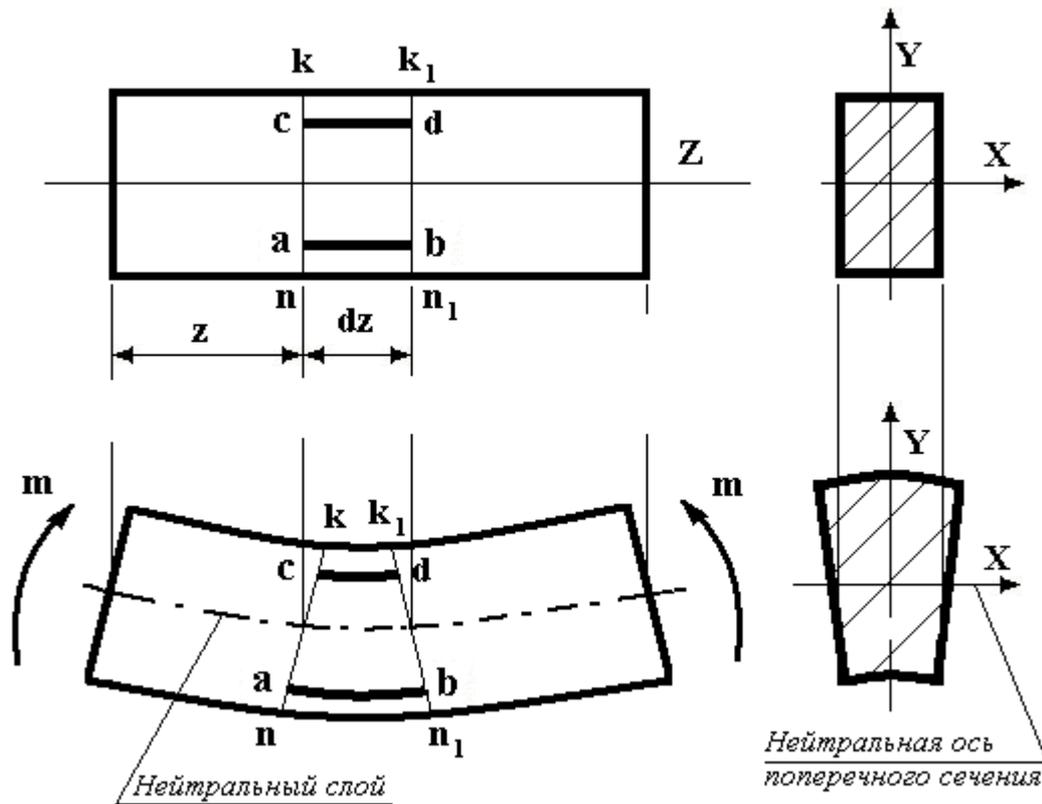


Рис. 8.3. Деформация балки при чистом изгибе

Это позволяет сделать следующие *выводы о характере деформаций при чистом изгибе*:

1. **Поперечные сечения балки и после деформации остаются плоскими**
2. Так как верхние волокна балки сжаты, а нижние – растянуты и деформация волокон меняется непрерывно по высоте балки, то на каком-то уровне есть **слой, не изменивший своей длины** – это так называемый **нейтральный слой**.
3. **Нейтральный слой перпендикулярен к плоскости симметрии балки и пересекает плоскость каждого поперечного сечения по прямой, называемой нейтральной осью сечения**. Эта ось перпендикулярна к плоскости симметрии балки.
4. Повороты сечений происходят вокруг их нейтральных осей, поэтому **изогнутая ось балки и после деформации остается лежать в плоскости действия внешних сил – в силовой плоскости**.
5. Деформации материала балки в направлении ее ширины показывают, что ее **продольные волокна испытывают обычное растяжение или сжатие**.

К таким же выводам приводит и простой опыт с резиновым бруском прямоугольного сечения, на боковой поверхности которого предварительно выполнить (например, краской) линии, параллельные оси и параллельные плоскости сечения.

**8.2.2. Допущения, полагаемые в основу расчетов.** Экспериментальные исследования деформации балок при изгибе (п. 7.2.1) дают основание для ряда *допущений*, положенных в основу дальнейших расчетов:

1. При **чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и после деформации**, т.е. принимается **гипотеза плоских сечений**.
2. **Продольные волокна друг на друга не давят и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие**. При **чистом** изгибе – *строго*, а при **поперечном** изгибе – *примерно*, т.к. в последнем случае в поперечных сечениях возникают и **касательные** напряжения.

3. Деформации волокон не зависят от положения этих волокон по ширине сечения. Следовательно, **нормальные напряжения**, изменяясь по высоте сечения, **остаются по ширине сечения одинаковыми**.

Помимо допущений введем *ограничения*, которые будут нами использоваться при дальнейших теоретических исследованиях:

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии и все *внешние силы лежат в этой плоскости*.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях **плоского изгиба** без коробления и скручивания.

**8.2.3. Нормальные напряжения.** Образование деформаций при чистом изгибе можно рассматривать как результат поворота плоских поперечных сечений относительно друг друга.

Рассмотрим равновесие части балки (рис. 8.4 а), находящейся под действием внешнего момента  $m$  и внутренних сил, возникающих в произвольном поперечном сечении.

Вокруг точки  $A$  выделим элементарную площадку  $dF$  (рис.8.4 б). По этой элементарной площадке будут действовать элементарные усилия:  $\sigma \cdot dF$ .

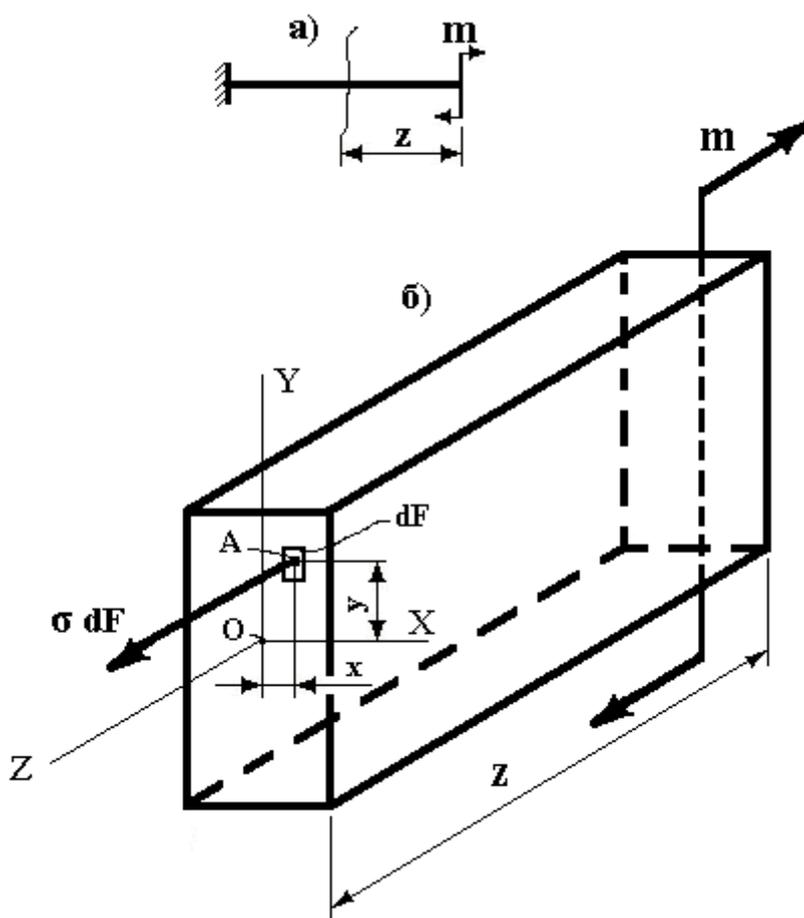


Рис.8. 4. Равновесие части балки при плоском чистом изгибе

В соответствии с правилами теоретической механики можно записать 6 уравнений равновесия:

$$1. \quad \sum X = 0, \quad 0 \equiv 0$$

$$2. \quad \sum Y = 0, \quad 0 \equiv 0$$

Получаем тождества, т.к. внутренние силы  $\sigma dF$  перпендикулярны к этим осям

$$3. \quad \sum Z = 0, \quad N = \int_F \sigma dF = 0. \quad (8.1)$$

$$4. \quad \sum m_Z = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Это уравнение также обращается в тождество, т.к. внутренние усилия  $\sigma dF$  параллельны оси  $Z$ .

$$5. \quad \sum m_Y = 0, \quad M_Y = \int_F \sigma dF x = 0. \quad (8.2)$$

$$6. \quad \sum m_X = 0, \quad M_X = m = \int_F \sigma dF y = 0. \quad (8.3)$$

Полученные три уравнения не могут быть решены, т.к. мы не знаем закона, по которому распределяются нормальные напряжения  $\sigma$  по высоте поперечного сечения.

**Задачи** такого рода, когда уравнений равновесия (уравнений статики) недостаточно, носят, как известно, название **статически неопределимых**.

Для **определения закона распределения нормальных напряжений**  $\sigma$  в поперечном сечении балки при чистом изгибе рассмотрим, по аналогии с рис. 8.3, участок бруса (см. рис. 8.4 а) элементарно малой длины  $dz$ . Покажем этот участок до и после деформации и изобразим в увеличенном масштабе (рис.8.5).

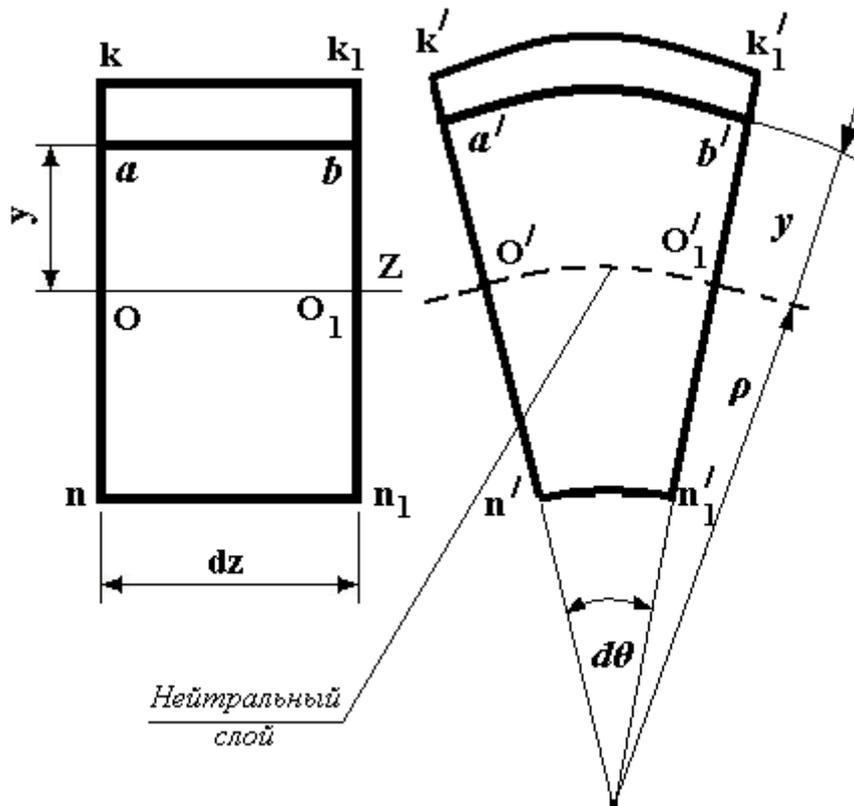


Рис. 8.5. Деформация участка балки малой длины при чистом изгибе

Рассмотрим деформацию участка балки, ограниченного сечениями  $kn$  и  $k_1n_1$

Под действием изгибающих моментов сечения повернутся друг относительно друга на угол  $d\theta$  (см. рис. 8.5): примут положения  $k'n'$  и  $k'_1n'_1$ . Слой  $ab$  изогнется и

примет положение  $a'b'$ , а слой  $OO_1$  – положение  $O'O'_1$ . **Примем**, что слой  $OO_1=dz$  своей длины не меняет, т.е это будет нейтральный слой.

Ось  $Z$  совместим с  $OO_1$ .

Радиус кривизны слоя  $OO_1$  обозначим  $\rho$ . В результате поворота сечений кривизна этого слоя, строго говоря, определяется выражением:

$$tg d\theta = \frac{dz}{\rho}, \text{ но } d\theta \text{ – мало, поэтому } \frac{dz}{\rho} = d\theta.$$

Переписав последнюю выражение, получим зависимость:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} \quad (8.4)$$

На некотором расстоянии  $y$  от оси  $Z$  выделим волокно  $ab$ , длина которого до деформации будет равна:

$$l_{\cup ab} = dz = \rho d\theta.$$

Аналогично, после деформации, длина дуги  $a'b'$  будет равна:

$$l_{\cup a'b'} = (\rho + y)d\theta.$$

Изменение длины исследуемого волокна (его абсолютное удлинение) равно:

$$\Delta dz = a'b' - ab = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta.$$

Относительное удлинение волокна  $ab$  равно:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (8.5)$$

По закону Гука, с учетом (7.5)  $\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$ .

**Нормальные напряжения в произвольном слое сечения:**

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (8.6)$$

**Анализ формулы (8.6) приводит к следующим выводам:**

1. При чистом изгибе **нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону.**

2. Величина нормальных напряжений в произвольном слое сечения постоянна и определяется координатой этого слоя по отношению к продольной оси балки  $Z$ , т.е. расстоянием этого слоя от нейтральной оси.

3. При  $y = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Следовательно, в слое  $OO_1$ , который был принят совпадающим с продольной осью балки  $Z$ , напряжения (следовательно и деформации) равны нулю. Это – **НЕЙТРАЛЬНЫЙ СЛОЙ**.

*НЕЙТРАЛЬНАЯ ЛИНИЯ* – это геометрическое место точек сечения, удовлетворяющее условию:  $\sigma = 0$ .

**Ось  $Z$  СОВПАДАЕТ С НЕЙТРАЛЬНЫМ СЛОЕМ.**

4. При  $y = \max$ ,  $\sigma$  принимает  $\max$  или  $\min$  значения.

Нормальные напряжения будут иметь экстремальные значения в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

Для примера, на рис. 8.6, показан характер изменения нормальных напряжений по высоте прямоугольного сечения балки.

Таким образом, радиус  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя.

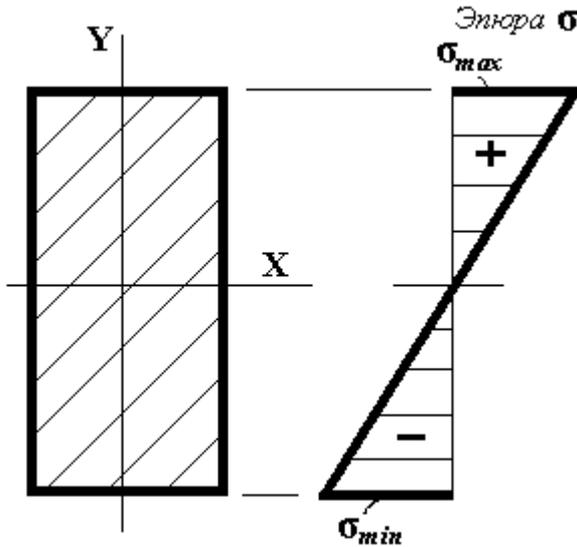


Рис. 8.6. Распределение нормальных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения балки (знаки соответствуют рис. 8.5)

В начале координат, где пересекаются оси сечения  $X$  и  $Y$ , нормальные напряжения равны нулю.

Для сечения, симметричного относительно горизонтальной оси, экстремальные значения нормальных напряжений равны по абсолютной величине.

Таким образом, мы выяснили только характер зависимости нормальных напряжений от координаты слоя, но не определили их величину, т.к. радиус кривизны нейтрального слоя  $\rho$  нам не известен.

Мы также не знаем конкретного положения осей сечения  $X$  и  $Y$ .

Для ответа на поставленные вопросы, используя формулу (8.6), перепишем те уравнения равновесия, в которые входит величина  $\sigma$ : (8.1), (8.2), (8.3).

Из уравнений (8.1) и (8.6) получим:

$$\frac{E}{\rho} \int y dF = 0, \quad (8.7)$$

но  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , т.к. модуль  $E$  не может быть равен нулю.

Поэтому выражение (8.7) обратится в нуль при условии  $\int_F y dF = 0$ .

Помним, что интеграл вида  $\int_F y dF = S_X$ ,

где  $S_X$  – статический момент площади сечения относительно оси  $X$ .

Ось  $X$  перпендикулярна оси  $Z$  (см. рис. 8.4), которая была нами **условно совмещена** со слоем радиусом  $\rho$ , который мы назвали нейтральным слоем. **Следовательно, ось  $X$  совпадает с нейтральной осью сечения.**

Равенство нулю статического момента  $S_X$  означает, что **нейтральная ось при чистом изгибе проходит через центр тяжести сечения.**

Центральная ось  $X$  поперечного сечения является его **нейтральной осью.**

**Из уравнений (8.2) и (8.6):**

$$\frac{E}{\rho} \int yx dF = 0. \quad (8.8)$$

По причине, указанной выше  $\int yx dF = 0$ .

Интеграл вида  $\int yx dF = I_{XY}$ ,

где  $I_{XY}$  – центробежный момент инерции сечения относительно осей  $X, Y$ .

Равенство нулю центробежного момента указывает на то, что оси  $X$  и  $Y$  являются главными осями инерции,

Ось  $X$  – центральная ось сечения (см. выше), поэтому и ось  $Y$  будет центральной.

Таким образом,

**оси  $X$  и  $Y$  – главные центральные оси сечения.**

**Из уравнений (8.3) и (8.6):**

$$M_X = m = \frac{E}{\rho} \int y^2 dF. \quad (8.9)$$

Интеграл вида  $\int y^2 dF = I_X$ ,

где  $I_X$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $X$ , которая является главной центральной осью и, одновременно, нейтральной осью сечения.

Следовательно, мы получаем, что  $M_X = \frac{E}{\rho} \cdot I_X$ , откуда, после преобразований:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{EI_X}. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) выражает зависимость кривизны бруса от изгибающего момента.

Величина  $EI_X$  называется **жесткостью бруса при изгибе.**

Если теперь в формулу (8.6) вместо  $\frac{1}{\rho}$  подставить его значение из формулы

(8.10), то получим:

$$\sigma = E y \frac{1}{\rho} = \frac{E y M_X}{E \cdot I_X} = \frac{M_X y}{I_X}.$$

Данное выражение используется для определения нормальных напряжений при плоском чистом изгибе и носит название «**формула НАВЬЕ**»:

$$\sigma = \frac{M_X \cdot y}{I_X}. \quad (8.11)$$

Ранее нами был сделан вывод о том, что **максимальные напряжения возникают в слоях, наиболее удаленных от нейтрального слоя**. Тогда, подставив в (8.11) максимальную координату слоя, получим:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X y_{\max}}{I_X}. \text{ Обозначим}$$

$$\frac{I_X}{|y_{\max}|} = W_X - \text{осевой момент сопротивления сечения} \quad (8.12)$$

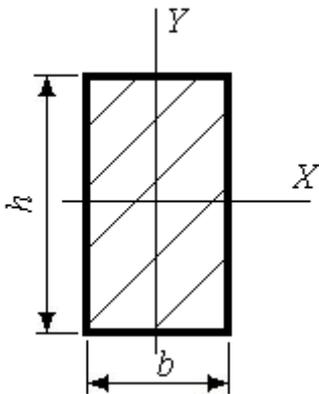
Аналогично определим  $W_Y$ . Видим, что  $W_X$  и  $W_Y$  **всегда больше нуля**. Таким образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X}, \quad (8.13)$$

**8.2.4. Рекомендации по определению осевых моментов сопротивления.** Для прокатных профилей значения  $W_X$  и  $W_Y$  приводятся в так называемых таблицах сортамента, которые можно найти в приложениях учебников по сопротивлению материалов и в справочной литературе.

Для простых сечений  $W_X$  и  $W_Y$  вычисляется по формулам, приведенным ниже.

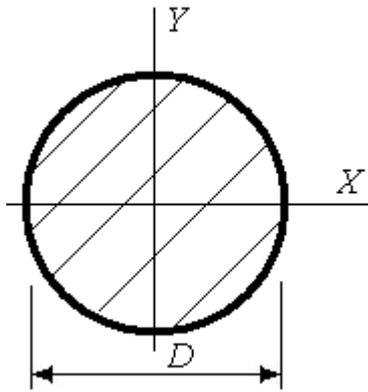
**Прямоугольник**



$$I_X = \frac{bh^3}{12}, \quad |y_{\max}| = \frac{h}{2}.$$

$$I_Y = \frac{hb^3}{12}, \quad |x_{\max}| = \frac{b}{2}$$

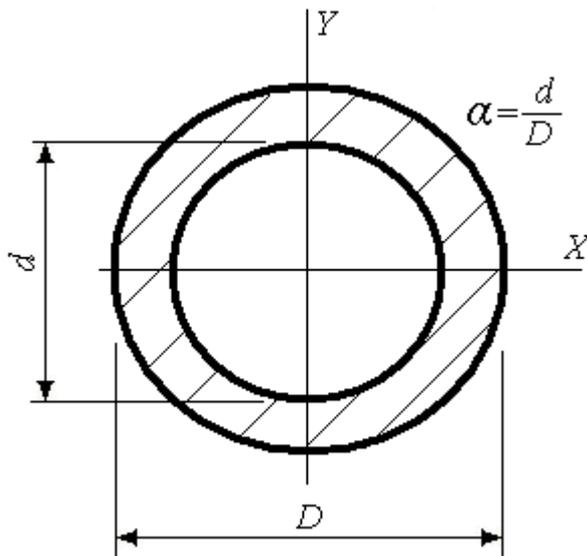
$$W_X = \frac{bh^2}{6}; \quad W_Y = \frac{hb^2}{6}.$$

**Круг**

$$I_X = I_Y = \frac{\pi D^4}{64},$$

$$|y_{\max}| = |x_{\max}| = \frac{D}{2}.$$

$$W_X = W_Y = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^3.$$

**Кольцо**

$$I_X = I_Y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$$

$$|y_{\max}| = |x_{\max}| = \frac{D}{2}.$$

$$W_X = W_Y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4).$$

Для составных и сложных сечений  $W_X$  и  $W_Y$  определяются по формуле (8.12) с учетом рекомендаций **темы «Геометрические характеристики плоских сечений»**.

**8.2.5. Условие прочности балки по нормальным напряжениям.** Условие прочности по нормальным напряжениям, исходя из (8.11 и 8.13) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I_{\max}} \leq [\sigma], \text{ или}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]. \quad (8.17)$$

**Момент сопротивления** сечения определяем относительно оси, перпендикулярной силовой плоскости – здесь условно обозначили  $X$ .

**Проверка прочности** балок при плоском чистом изгибе выполняется с использованием неравенства (8.17) – это первый тип расчетов.

**Проектировочный расчет** (подбор размеров сечения балки – второй тип расчетов), исходя из условия прочности, производится по формуле:

$$W_X \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}. \quad (8.18)$$

**Максимальную грузоподъемность** балки (допускаемые значения внешних нагрузок – *третий тип* расчетов):

$$[M] = M_{\max} \leq W_X \cdot [\sigma]. \quad (8.19)$$

**8.2.6. Закон Гука при изгибе.** Из выражения (8.10)  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{E I_X}$  видим:

- моменты инерции  $I_X$  и  $I_Y$  поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения характеризуют сопротивляемость балки деформации изгиба (**зависимость от формы и размеров сечения**).
- величина  $E$  характеризует сопротивляемость балки деформации изгиба (**зависимость от упругих свойств материала**).
- чем больше  $I_X$  и  $E$ , тем больше  $\rho$  (*кривизна бруса уменьшается*), т.е. балка деформируется в меньшей степени (**жесткость ее увеличивается**).

Используя выражения (8.4 и 8.10) можем записать, что

$$\frac{M_X}{E I_X} = \frac{d\theta}{dz}, \text{ откуда } d\theta = \frac{M_X dz}{E I_X}.$$

Проинтегрировав полученное выражение, запишем

**закон Гука при изгибе:**

$$\theta = \int_l \frac{M_X}{E I_X} dz. \quad (8.14)$$

*Абсолютная деформация балки при изгибе прямо пропорциональна изгибающему моменту, расстоянию между сечениями и обратно пропорциональна жесткости балки при изгибе.*

**8.2.7. Потенциальная энергия деформации.** Энергия упругих деформаций бруса при изгибе определяется работой изгибающего момента на угловом перемещении  $d\theta$  двух сечений:

$$dU = \frac{1}{2} M_X d\theta; \quad dU = \frac{1}{2} M_X \frac{M_X dz}{E I_X} = \frac{1}{2} \frac{M_X^2 dz}{E I_X}.$$

Тогда полная потенциальная энергия при изгибе определится интегралом

$$U = \int_l dU = \int_l \frac{M_X^2 dz}{2E I_X}. \quad (8.15)$$

При чистом изгибе балки постоянного поперечного сечения получаем:

$$U = \frac{M_X^2 l}{2E I_X} \quad (8.16)$$

**8.2.8. Рациональные поперечные сечения балок. Рациональное – это то сечение, которое обладает минимальным весом (материалоемкостью) при обеспечении требуемой прочности, жесткости и долговечности.** Основываясь на зависимостях (8.17 – 8.19) можно высказать несколько практических рекомендаций, касающихся выбора **рациональных поперечных сечений**. Рациональности сечения добиваются:

- выбором формы сечения;
- выбором размеров сечения;
- ориентацией сечения относительно силовой плоскости;
- размещением опорных устройств.

Более подробно этот вопрос изложен в методических указаниях (приложение Е) «Выполнение расчетно-проектировочных заданий по сопротивлению материалов», часть 1, Могилев, 2001.

В случае сложного сечения необходимо определить положение главных центральных осей инерции сечения. Поперечное сечение необходимо располагать так, чтобы силовая плоскость (плоскость действия изгибающего момента) была перпендикулярна оси  $max$  – главной центральной оси. Жесткость балки будет наибольшей.

### 8.3. Плоский поперечный изгиб

При плоском (прямом) поперечном изгибе, когда в сечениях балки действуют изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ , возникают не только нормальные  $\sigma$ , но и касательные  $\tau$  напряжения (рис. 8.7).

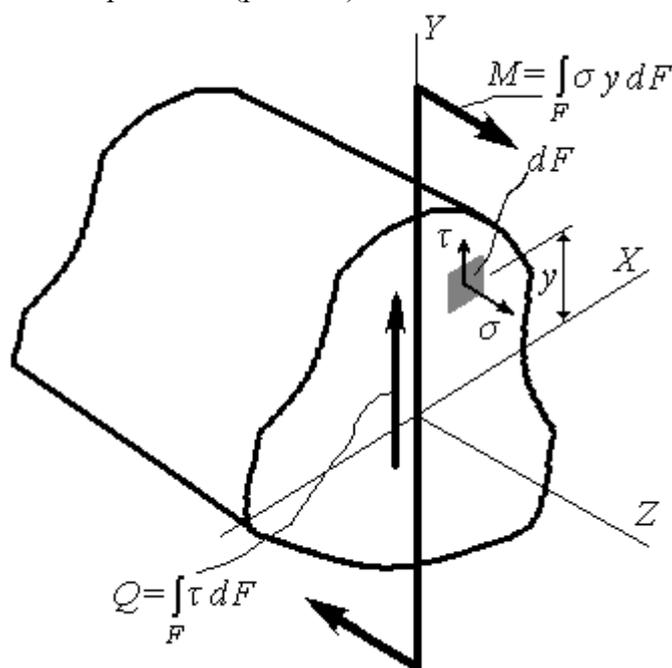


Рис. 8.7. Внутренние силовые факторы и напряжения в произвольном сечении балки при прямом поперечном изгибе

Касательные напряжения, на основании закона их парности, возникают также и в продольных слоях ( $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ), что вызывает сдвиги отдельных волокон друг относительно друга (рис. 8.8 а). Под действием касательных напряжений поперечные сечения искривляются и сдвигаются друг относительно друга (рис. 8.8 б).

Вследствие сдвигов **гипотеза плоских сечений**, в отличие от чистого изгиба, **не выполняется**: сечения, плоские до деформации искривляются (наблюдается **депланация сечения**).

Теоретические и экспериментальные исследования показали, что **влияние указанного эффекта на величину нормальных напряжений зависит от отношения высоты сечения к длине пролета (для балок это отношение мало)**. Поэтому влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений пренебрегают, т.е. принимают гипотезу Бернулли – при расчетах используются **формула Навье**. Остается проанализировать распределение касательных напряжений.

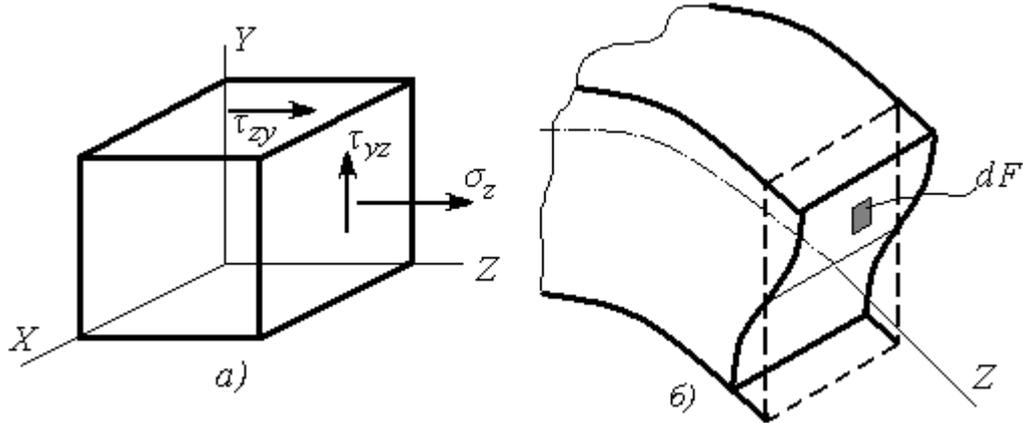


Рис. 8.8. Напряженное состояние в точке поперечного сечения и деформация сечения в связи с действием касательных напряжений

**8.3.1. Касательные напряжения (формула Д.И. Журавского).** Рассмотрим однопролетную балку, имеющую произвольную форму поперечного сечения (с вертикальной осью симметрии), нагруженную силой  $P$  (рис. 8.9).

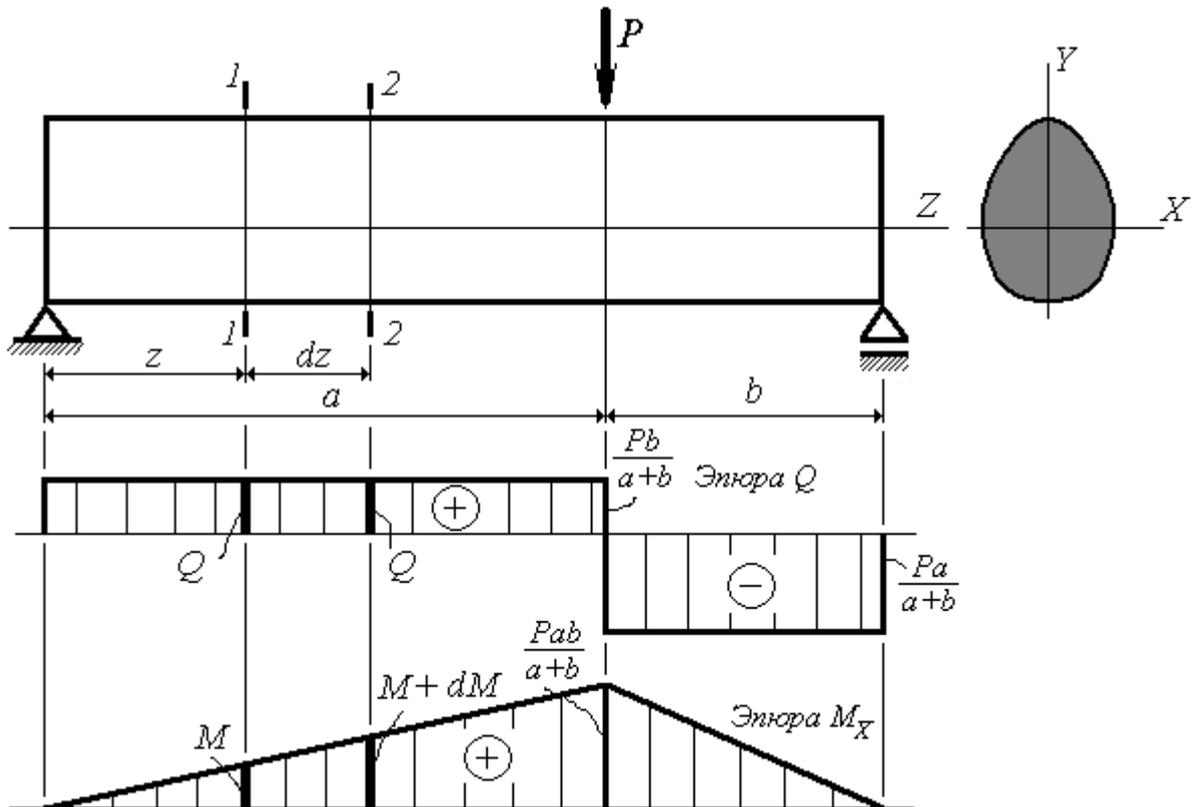


Рис. 8.9. Прямой поперечный изгиб однопролетной балки с сечением произвольной формы

Двумя близкими поперечными сечениями  $1-1$  и  $2-2$  выделим элемент длиной  $dz$ . Из эпюр внутренних силовых факторов видим, что в этих сечениях возникают положительные по знаку поперечная сила и изгибающий момент (рис. 8.10 а). Видим, что **изгибающие моменты в этих сечениях неуравновешены**, что противоречит методу сечений.

Изобразим эпюры нормальных напряжений, а также покажем вектора касательных напряжений в сечениях  $1-1$  и  $2-2$  и парные этим напряжениям – в продольном (**исследуемом**) слое с координатой  $y$  (рис. 8.10 б). Напрашивается вывод, что касательные напряжения в продольном слое, суммируясь с нормальными напряжениями в сечении  $1-1$ , будут уравнивать нормальные напряжения в сечении  $2-2$ .

Изобразим левое сечение ( $1-1$ ) и выделим в нем произвольную элементарную площадку  $dF$  на координате  $y_1$  от оси сечения  $X$  (рис. 7.10 в).

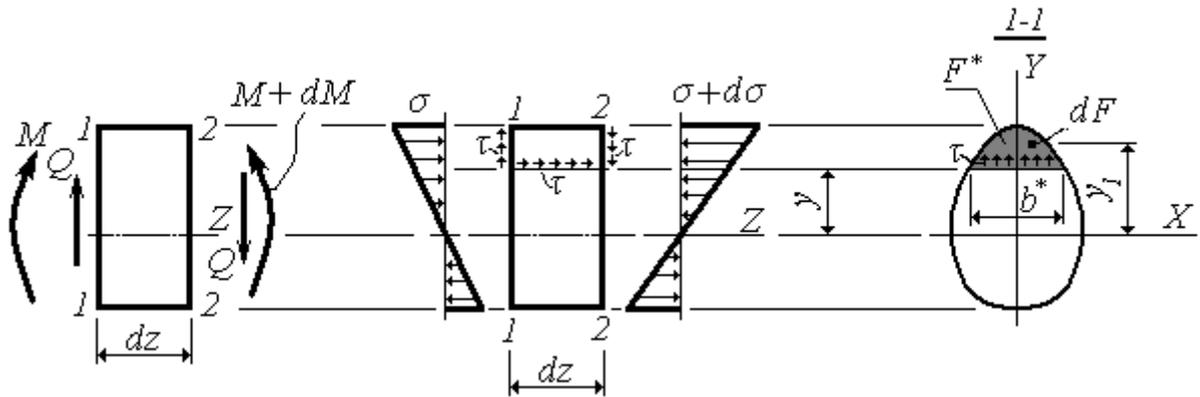


Рис. 8.10. Напряжения в сечениях балки

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на координате  $y$  от нейтрального слоя ( $OX$ ), разделим элементарный участок бруса на две части (рис. 8.11).

Рассмотрим равновесие верхней части (отсеченной части сечения – выделена серым оттенком на рис. 8.10 в).

**В левом сечении** равнодействующая нормальных сил  $\sigma dF$  (см. рис. 8.10 в и рис. 8.11) в пределах выделенной части (обозначена  $F^*$ ) определится произведением:

$$N^* = \int_{F^*} \sigma dF. \quad (8.20)$$

В соответствии с формулой Навье нормальные напряжения, приложенные к площадке  $dF$  на координате  $y_1$  будут равны  $\sigma = \frac{M_X y_1}{I_X}$ , поэтому, с учетом (8.20):

$$N^* = \int_{F^*} \frac{M_X y_1}{I_X} dF = \frac{M_X}{I_X} \int_{F^*} y_1 dF.$$

Интеграл  $\int_{F^*} y_1 dF = S_X^*$ , тогда:

$$N^* = \frac{M_X}{I_X} S_X^*. \quad (8.21)$$

**В правом сечении** продольная сила, по аналогии с продольной силой в левом сечении, будет определяться зависимостью:

$$N^* + dN^* = \frac{M_X + dM_X}{I_X} S_X^*. \quad (8.21)$$

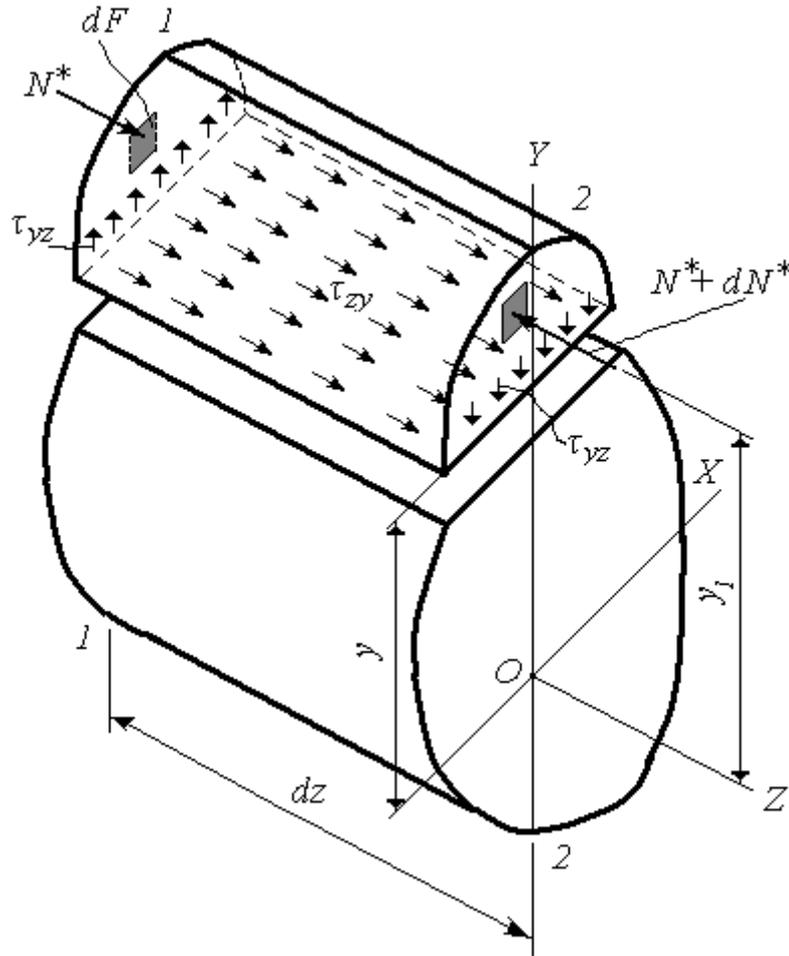


Рис. 8.11. Равновесие участка бруса элементарно малой длины  $dz$

Разность сил (8.20 и 8.21) даст формулу для определения элементарной продольной силы:

$$dN^* = \frac{dM_X}{I_X} S_X^*. \quad (8.22)$$

Эта элементарная сила (в правом сечении) **должна уравниваться** касательными силами  $dT$  в продольном слое элементарного участка бруса, при условии, что касательные напряжения  $\tau_{zy}$  **в исследуемом слое** с координатой  $y$  распределены равномерно:

$$dT = \tau_{zy} b^* dz. \quad (8.23)$$

Приравниваем (8.22) и (8.23)

$$\frac{dM_X}{I_X} S_X^* = \tau_{zy} b^* dz,$$

откуда, с учетом дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dz}$ , получим:

$$\tau_{zy} = \frac{dM S_X^*}{dz b^* I_X} = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}.$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений  $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$ . Получаем формулу для определения касательных напряжений в поперечном сечении при прямом поперечном изгибе, которая носит имя русского инженера и ученого Д.И. Журавского.

**Формула Д.И. Журавского:**

$$\tau = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}, \quad (8.24)$$

где  $Q$  – поперечная сила в исследуемом поперечном сечении,

$I_X$  – осевой момент инерции поперечного сечения,

$S_X^*$  – статический момент части поперечного сечения, отсеченной на исследуемой высоте от нейтрального слоя – на координате  $y$  (статический момент отсеченной части),

$b^*$  – ширина поперечного сечения на исследуемой высоте от нейтрального слоя – на координате  $y$ .

Видим, что по высоте сечения бруса касательные напряжения распределяются по закону, отличному от линейного.

**8.3.2. Эпюра распределения касательных напряжений.** Исследуем закон распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки, нагруженной поперечной силой  $Q$ .

а) **ПРЯМОУГОЛЬНОЕ** сечение (рис. 8.12). На расстоянии  $y$  от нейтральной оси (ось  $X$ ) сечения проведем прямую 1-4, параллельную этой оси, которая отсекает прямоугольник площадью  $F_{1234}$ .

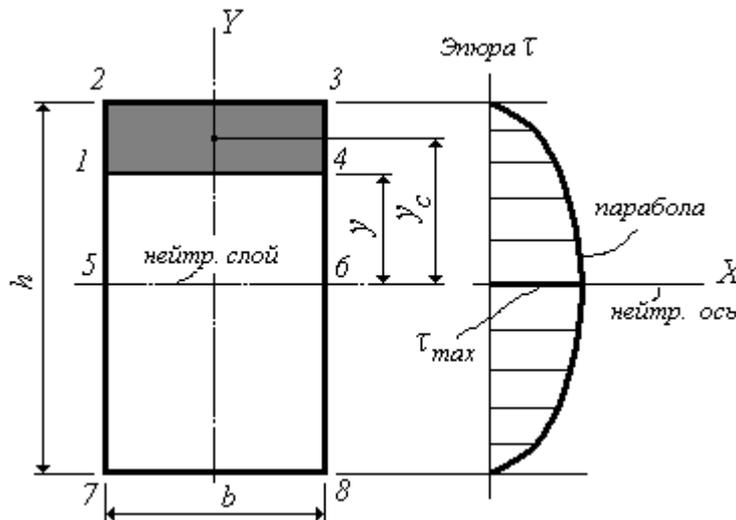


Рис. 8.12. Вид эпюры касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения

Определим значения площади  $F^*$  и статического момента  $S^*$  отсеченной части площади сечения:

$$F_{1234} = F^* = b\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

$$S_{1234} = S^* = F^* y_C = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \left(y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Подставим их значения в формулу Журавского (8.24) и получим выражение:

$$\tau = \frac{Q \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Анализируя данное выражение, видим, что получено **уравнение второго порядка**, т.е. касательные напряжения по высоте сечения распределены по параболическому закону с характерными значениями:

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2} \rightarrow \tau = 0; \quad \text{при } y = 0 \rightarrow \tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2F}.$$

Здесь  $F = bh$  – площадь прямоугольного сечения.

**Значения касательных напряжений в крайних слоях поперечного сечения, симметричного относительно нейтральной оси, равны нулю; в нейтральном слое – максимальны.**

Можно дать этому и другое объяснение. Касательные напряжения, в соответствии с формулой Журавского (8.24), определяются, в первую очередь, статическим моментом площади отсеченной части, т.е. статическим моментом площади части сечения, расположенной выше слоя, в котором эти напряжения определяются. Координата этого слоя –  $y$  (по отношению к нейтральному слою 5-6, положение которого совпадает с положением центральной оси сечения – см. теорию изгиба):

– при  $y = \frac{h}{2}$  (это слой 2-3) площадь  $F^*$  **равна нулю**, следовательно, и  $S_X^* = 0$ .

Касательные напряжения в верхнем крайнем слое равны нулю;

– при  $y = -\frac{h}{2}$  (это слой 7-8) площадь  $F^* = F_{2378} = bh$ . Имеем прямоугольное

сечение, симметричное оси  $X$  (центральной оси прямоугольника). По определению статический момент сечения относительно центральной оси равен нулю, следовательно  $S_X^* = 0$ .

Касательные напряжения в нижнем крайнем слое также равны нулю;

– при  $y = 0$  (это слой 5-6 – нейтральный слой) площадь  $F^* = F_{2356} = \frac{bh}{2}$ .

Статический момент этого прямоугольного сечения  $S_X^* = F_{2356} y_C = \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$ .

$$\text{Касательные напряжения } \tau = \frac{Q bh^2}{b \times 8 \times \frac{bh^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh} = \tau_{\max}.$$

Очень важно сравнить (**и помнить**) распределение нормальных и касательных напряжений. Видим:

- **в слоях, наиболее удаленных от нейтральной оси** (центральной оси) нормальные напряжения имеют **ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ** ЗНАЧЕНИЯ, а касательные напряжения **РАВНЫ НУЛЮ**;
- **на нейтральной оси** нормальные напряжения **РАВНЫ НУЛЮ**, а касательные напряжения имеют **МАКСИМАЛЬНОЕ** значение.

б) **ДУТАВРОВОЕ СЕЧЕНИЕ** (рис. 8.13 а). Особенность этого сечения – резкое изменение ширины сечения при переходе от стенки дутавра к его полке. Схематизируем сечение: заменим криволинейную форму полки прямоугольником со сторонами  $b - t$  (рис. 8.13 б).

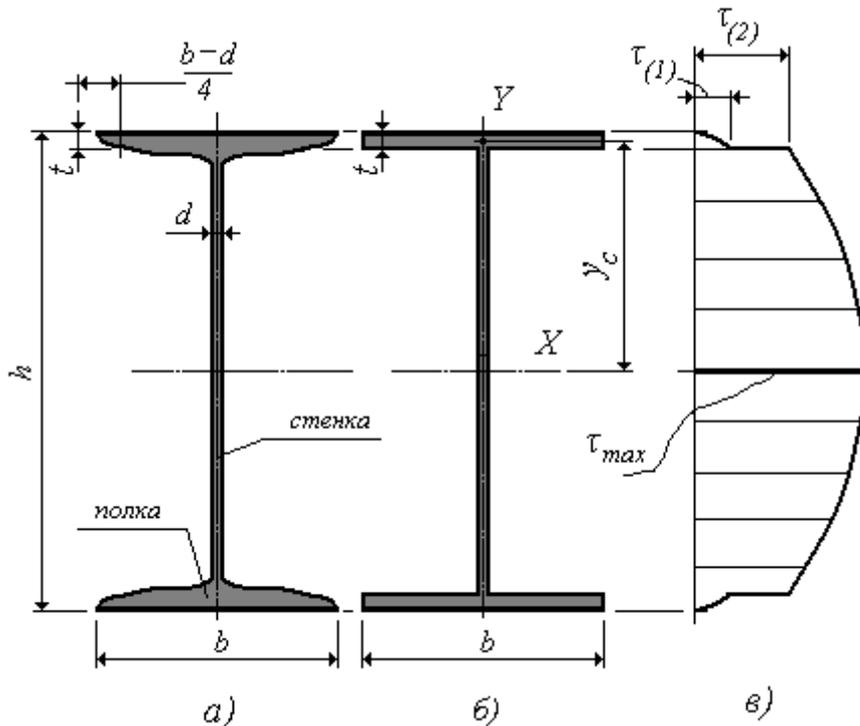


Рис. 8.13. Вид эпюры касательных напряжений для дутаврового поперечного сечения

Из предыдущего анализа следует, что воздействие поперечной силы воспринимает, в основном, стенка. Поэтому важной является оценка распределения касательных напряжений по высоте дутавра.

По аналогии с предыдущим примером:

- **в верхнем и нижнем слоях** полок дутавра, касательные напряжения **равны нулю**;
- **в нейтральном слое** (на оси  $X$ ) **касательные напряжения максимальны** и определяются по формуле Журавского, при этом  $S_X^* = S_{X_{\max}}^* = S_X^{\text{полусеч.}}$  – значение берется из таблиц сортамента (приведены разные обозначения);  $b^* = d$  – толщина стенки дутавра (см. таблицы сортамента);

В слое, где полка дутавра переходит в стенку, величина касательных напряжений будет определяться двумя параметрами:

– величиной статического момента площади отсеченной части  $S_X^*$  (прямоугольника со сторонами  $b$  и  $t$ ):

$$S_X^* = F^* \times y_C = b \times t \times \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right);$$

– величиной ширины слоя  $b^*$  на координате, где определяется значение касательного напряжения – будем иметь два их значения и, следовательно, две величины напряжения:

$$b_{(1)}^* = b \rightarrow \tau_{(1)}; \quad b_{(2)}^* = d \rightarrow \tau_{(2)}.$$

Второе значение напряжения будет значительно больше, ввиду того, что  $b \gg d$ . Покажем общий вид эпюры  $\tau$  (см. рис. 8.13 в). В слое, где полка переходит в стенку – скачок касательного напряжения, величина его приближается к значению  $\tau_{max}$ .

В связи с особенностями распределения касательных напряжений по высоте двутавра, **необходимо проверять на прочность слой**, в котором **сопрягаются полка со стенкой**.

**8.3.3. Условие прочности по касательным напряжениям.** В соответствии с формулой Журавского (7.24), определяются максимальные значения напряжений и записывается условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{max} = \frac{Q S_{X_{max}}^*}{b^* I_X} \leq [\tau] \quad (8.25)$$

Значение поперечной силы  $Q$  берется для исследуемого сечения.

По аналогии с другими видами нагружения, возможно решение задач по проверке прочности, возможно выполнение проектировочного расчета (достаточно громоздкое решение), определение максимальной нагрузки (грузоподъемности).

Для подавляющего большинства балок, работающих на изгиб,  $\tau_{max} \ll \sigma_{max}$ , поэтому **подбор сечений балок осуществляется из условия прочности по нормальным напряжениям. По касательным же напряжениям лишь проверяют прочность или максимальную грузоподъемность.**

#### **8.4. Расчет бруса на прочность по эквивалентным напряжениям (проверка прочности по 3 и 4 теориям)**

**8.4.1. Определение опасного сечения и опасных точек его.** При расчете элементов конструкций по условию прочности по допускаемым напряжениям при изгибе решается три типа задач:

- проверка прочности (проверочный расчет);
- подбор прочных размеров сечения (проектировочный расчет);
- определение допускаемой нагрузки (максимальная грузоподъемность).

Опасным при изгибе балки будет то сечение, в котором действуют:

– **максимальные** (экстремальные) по величине  $M_{max}$  и  $Q_{max}$ ;

– сечение, в котором оба силовых фактора ( $Q$  и  $M$ ) **близки к своим максимумам.**

Для того, чтобы решить задачу, необходимо найти опасное сечение и, затем – опасную точку (слой) этого сечения. Особенно это важно для сложных сечений.

Рассмотрим подход к проверке прочности на примере поперечного изгиба двутавра (рис. 8.14). Пусть мы выявили **опасное сечение** (рис. 8.14 а). В этом сечении характерными будут показанные на рисунке точки 1, 2, 3, 4.

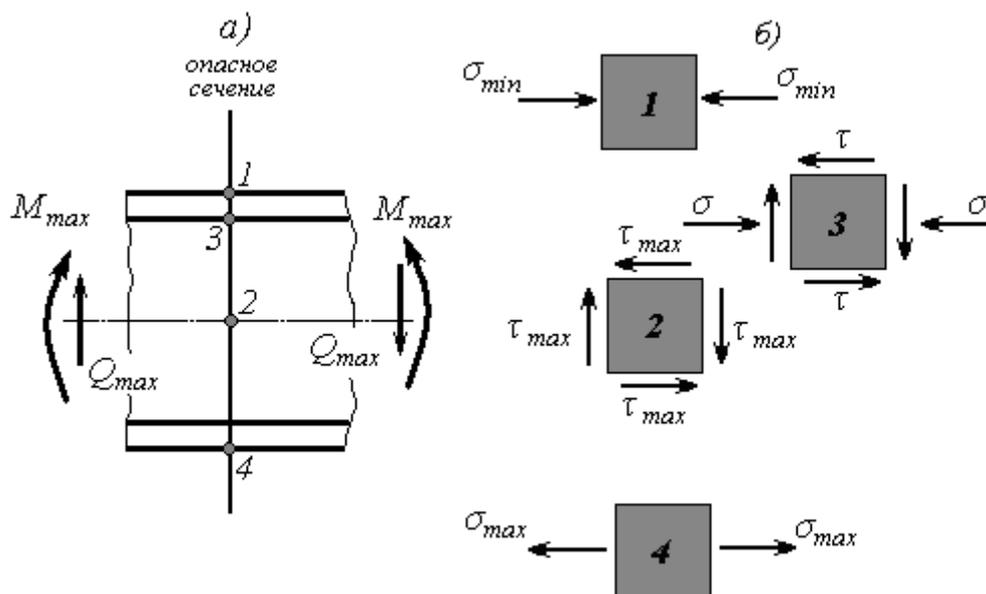


Рис. 8.14. Напряженное состояние в точках опасного сечения двутавровой балки

**Опасной точкой** данного сечения может быть **одна из трех точек** (рис. 8.14 б):

- **Точка 1** (и симметричная ей **точка 4**), в которой нормальные напряжения достигают наибольшей величины – точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Для этих точек напряженное состояние – **линейное**, т.к. **касательные напряжения равны нулю**. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]; \quad (8.26)$$

- **Точка 2**, в которой касательные напряжения достигают наибольшей величины – точка на нейтральном слое. Для этих точек напряженное состояние – **плоское** (чистый сдвиг), т.к. **нормальные напряжения равны нулю**. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_X^*}{b I_X} \leq [\tau] \quad (8.27)$$

**8.4.2. Проверка прочности по теориям прочности.** Проверку проводим для опасной точки опасного слоя (**Точка 3**). Она характеризуется тем, что хотя в этой точке  $\sigma$  и  $\tau$  и не принимают своих наибольших значений, но в своей комбинации создают опасное напряженное состояние: в этой точке напряжения близки к своим максимумам (рис. 8.15).

Материал в этой точке подвержен действию **плоского напряженного состояния**. Нормальные и касательные напряжения в опасном слое рассчитывают по общим формулам – соответственно, Навье и Журавского:

$$\sigma_{\text{оп.сл.}} = \frac{M y}{I_X}; \quad \tau_{\text{оп.сл.}} = \frac{Q S_X^*}{b^* I_X}. \quad (8.28)$$

В данном случае  $b^* = d$ . Подходы к определению значения  $S_X^*$  рассмотрены выше.

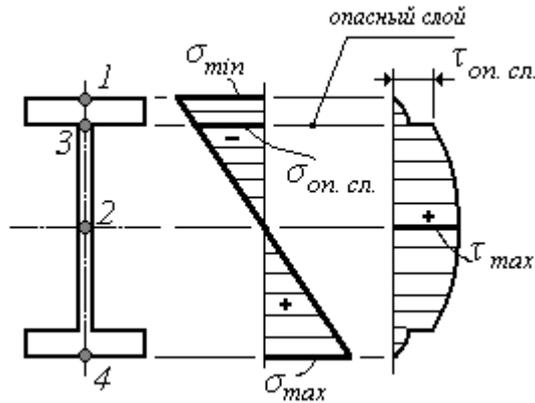


Рис. 8.15. Эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном слое

В данном случае следует использовать такое условие прочности, в котором бы учитывалось влияние обоих напряжений. Из теории напряженного состояния (глава 6) известны теории прочности. В случае расчетов конструкций из пластичных материалов, используются третья и четвертая теории.

Условие прочности **по третьей теории** имеет вид (формула 6.49):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.29)$$

Условие прочности **по четвертой теории** имеет вид (формула 6.50):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.30)$$

В этом случае необходимо производить **полный расчет балки на прочность**:

- проверить прочность (подобрать сечение) балки из расчета **по условию прочности для нормальных напряжений** – по  $M_{\text{max}}$  (формула 8.26);
- проверить прочность балки из **расчета по условию прочности для касательных напряжений** – по  $Q_{\text{max}}$  (формула 7.27);
- проверить прочность **по третьей или четвертой теориям прочности** в опасном сечении (определяется сопоставлением эпюр  $Q$  и  $M$ ). Это сечение, в котором оба силовых фактора ( $Q$  и  $M$ ) **близки к своим максимумам**. Используются формулы (8.29 или 8.30).

Длительная практика расчета балок показала, что в большинстве случаев величина максимальных касательных напряжений по крайней мере на порядок ниже величины максимальных нормальных напряжений, поэтому **опасным слоем опасного сечения** является слой, наиболее удаленный от нейтральной линии, а условие (8.26) – является **основным условием прочности**, по которому проводят расчеты.

### 8.4.3. Примеры выполнения расчета балок

**8.4.3.1. Для деревянной балки прямоугольного сечения** (рис. 8.16) определить допускаемую нагрузку.

Дано:  $[\sigma] = 11$  МПа,  $[\tau] = 1,5$  МПа.

Решение.

Геометрические характеристики прямоугольного сечения:

$$F = bh; \quad W_X = \frac{bh^2}{6}.$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов, определяем максимальные значения  $Q$  и  $M$ .

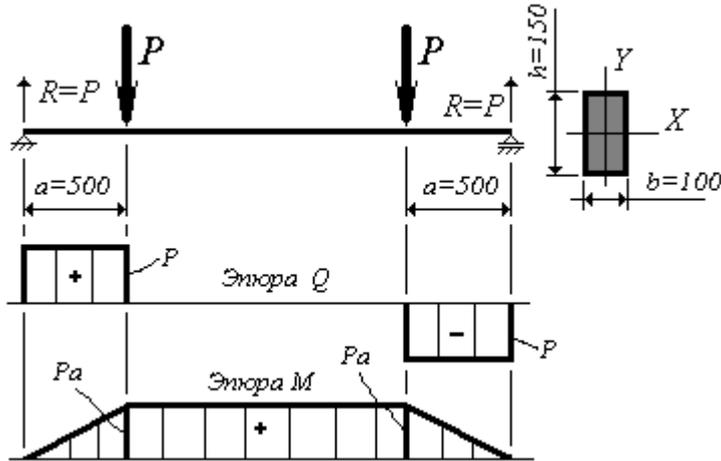


Рис. 8.16. Схема нагружения, поперечное сечение балки и эпюры  $Q$  и  $M$  к примеру 1

Максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{6Pa}{bh^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2F} = \frac{3P}{2bh}.$$

Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pa}{bh^2} \leq [\sigma]; \quad \tau_{\max} = \frac{3P}{2bh} \leq [\tau].$$

Определение значений допускаемой нагрузки из условий прочности:

по нормальным напряжениям –

$$[P]_{\sigma} = \frac{[\sigma]bh^2}{6a} = \frac{11 \times 10^6 \times 0,1 \times 0,15^2}{6 \times 0,5} = 8250H;$$

по касательным напряжениям –

$$[P]_{\tau} = \frac{2[\tau]bh}{3} = \frac{2 \times 1,5 \times 10^6 \times 0,1 \times 0,15}{3} = 15000H.$$

Ответ: допускаемая нагрузка на балку – наименьшая из двух:  $[P]=8250H$ .

**8.4.3.2. Определить нормальные и касательные напряжения** в сечении  $A$  балки (рис.8.17) на расстоянии 5 см от верхней грани ее прямоугольного сечения (в слое  $A-A$ ).

Решение.

Опорные реакции:

$$R_C = \frac{3P}{5} = \frac{3 \times 10}{5} = 6 \text{ кН}; \quad R_B = \frac{2P}{5} = \frac{2 \times 10}{5} = 4 \text{ кН}.$$

Строим эпюры внутренних силовых факторов. Из эпюр определяем значения  $Q$  и  $M$  в заданном сечении  $A$ :

$$Q_A = -R_B = -4 \text{ кН}; \quad M_A = 2,5R_B = 2,5 \times 4 = 10 \text{ кН м}.$$

Напряжения в заданном слое  $A-A$  поперечного сечения определяются:

– нормальные напряжения по формуле Навье

$$\sigma_{A-A} = \frac{M_A y_{A-A}}{J_X};$$

– касательные напряжения по формуле Журавского

$$\tau_{A-A} = \frac{Q_A S_X^*}{b J_X}.$$

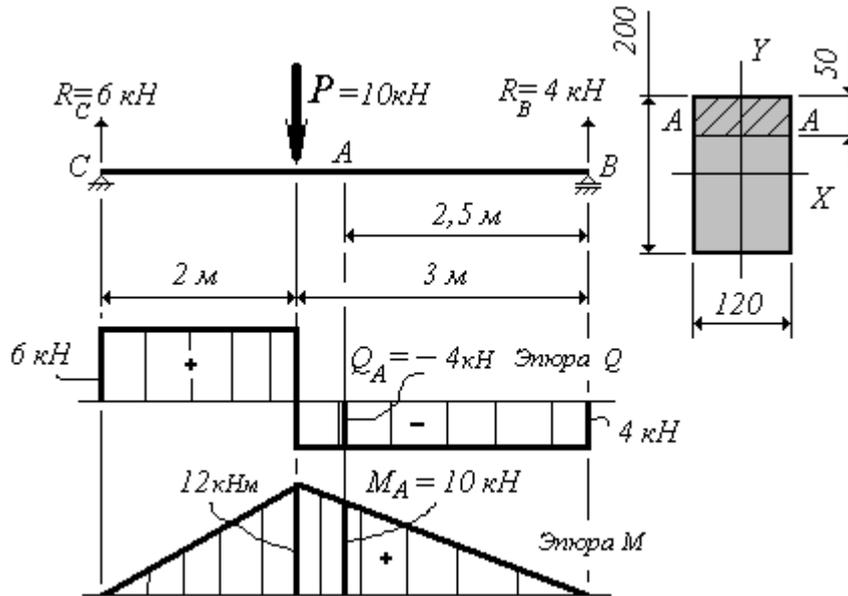


Рис. 8.17. Схема нагружения, поперечное сечение балки и эпюры  $Q$  и  $M$  к примеру 2

Определяем значения параметров, входящих в формулы:

$$y_{A-A} = 0,05 \text{ м}; \quad b = 0,12 \text{ м}.$$

$$S_X^* = F^* y_C^* = 0,05 \times 0,12 \times (0,05 + 0,025) = -0,045 \text{ м}^3;$$

$$J_X = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,12 \times 0,2^3}{12} = 8 \times 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Расчет напряжений:

– нормальные напряжения

$$\sigma_{A-A} = \frac{10 \times 10^3 \times 0,05}{8 \times 10^{-5}} = 6,25 \text{ МПа}.$$

– касательные напряжения

$$\tau_{A-A} = \frac{-4 \times 10^3 \times 0,045}{0,12 \times 8 \times 10^{-5}} = -0,187 \text{ МПа}.$$

Ответ:  $\sigma_{A-A} = 6,25 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{A-A} = -0,187 \text{ МПа}$ .

### 8.5. Расчет на жесткость.

Очень важным при расчете балок является определение перемещений, которые получают точки балки под действием внешних нагрузок. По аналогии с рассмотренными ранее видами нагружения, при изгибе, наряду с расчетом на прочность, также проводят расчет на жесткость. Бывают случаи, когда **прочная** балка оказывается **нежесткой**.

**8.5.1. Понятие о прогибе и угле поворота сечения.** При прямом поперечном изгибе балок их точки получают линейные и угловые перемещения. Центр тяжести поперечного сечения балки перемещается вертикально, такое перемещение называют **прогибом**, а само сечение поворачивается на некоторый угол, называемый **углом поворота сечения** (рис.8.18). **Горизонтальным** перемещением центра тяжести сечения пренебрегают (смотри принцип начальных размеров).

Влиянием **поперечных сил** на перемещения при изгибе пренебрегаем.

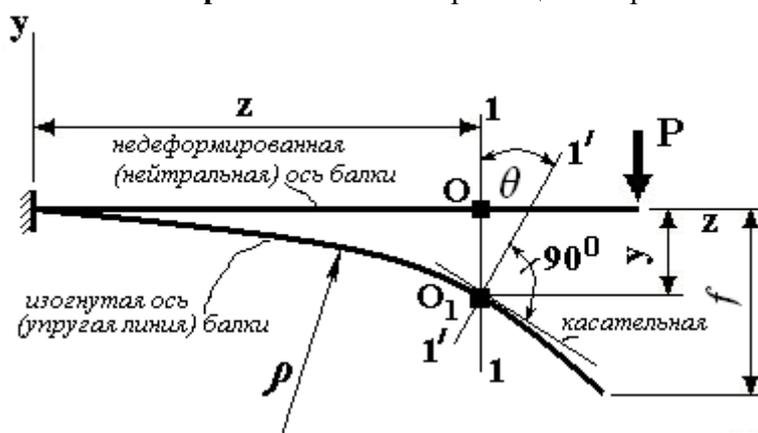


Рис. 8.18. К определению прогиба и угла поворота сечения балки

На рисунке обозначено:

$1-1$  – первоначальное положение сечения балки на координате  $z$ ,

$1'-1'$  – положение сечения балки после деформации,

$O$  – положение центра тяжести до деформации (нейтральная ось) балки,

$O_1$  – положение центра тяжести на нейтральной оси балки после ее деформации,

$\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя (изогнутой оси балки).

Длина оси балки остается постоянной, т.к. она расположена в нейтральном слое (нормальные напряжения  $\sigma$  в нейтральном слое равны нулю).

В результате деформации *центр тяжести сместился* в положение  $O_1$ . Вертикальное перемещение центра тяжести сечения – **прогиб** обозначают  $y$  или  $v$ . Максимальное значение прогиба (в рассматриваемом примере – рис. 8. 18) называют **стрела прогиба** и обозначают  $f$ .

*Сечение  $1-1$  повернулось* в положение  $1'-1'$ , оставаясь плоским, (**гипотеза плоских сечений**) на некоторый угол. **Угол поворота сечения** обозначают  $\theta$  или  $\varphi$ . Для определения угла поворота к изогнутой оси в исследуемой точке следует провести касательную, затем провести к ней перпендикуляр (прямая  $1'-1'$ ). Угол между этой прямой и прямой  $1-1$  и есть угол поворота сечения.

Угол поворота поперечного сечения – это угол между нормалью к недеформированной оси балки и нормалью к касательной к изогнутой оси балки.

Угол поворота и прогиб зависят от положения сечения, вида и положения приложенных нагрузок, размеров и материала балки.

Для определения перемещений при изгибе применяют несколько методов.

**8.5.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси (упругой линии) балки и его интегрирование.** При выводе формулы для определения нормальных напряжений при изгибе была получена зависимость:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (8.31)$$

Отметим попутно, что если **вместо** сосредоточенной силы приложить момент, то мы получим чистый изгиб. И тогда записанное выше выражение будет величиной постоянной. Это значит, что ось бруса будет изгибаться по радиусу окружности.

Для аналитического решения задачи по определению перемещений можно использовать известное из математического анализа выражение для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (8.32)$$

Приравнивая правые части, получим **дифференциальное уравнение изогнутой оси балки**:

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI}. \quad (8.33)$$

Решение этого уравнения – его интегрирование, вызывает определенные трудности. Поэтому обычно в инженерной практике используют так называемое приближенное дифференциальное уравнение. Его получают за счет следующих упрощений:

- т.к. прогибы на практике малы, то  $\operatorname{tg} \theta = \theta = \frac{dy}{dz} \approx 0,01$  радиана, т.е. углы поворота также малы;
- квадратом первой производной  $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$  пренебрегаем, т.к. она мала по сравнению с единицей.

Однако, в случае, например, **расчета гибких нитей** эти упрощения **не применяются** из-за того, что величина прогиба нити будет достаточно большой, т.е. необходимо использовать точное решение.

Получаем приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \pm \frac{M}{EI}. \quad (8.34)$$

Знак радиуса кривизны может не совпадать со знаком  $M$ , поэтому в общем случае необходимо оставить знаки ( $\pm$ ).

В правой системе координат (ось  $y$  направлена вверх, ось  $z$  – влево) положительному значению  $M$  (сжато верхнее волокно) соответствует положительная кривизна (рис. 8.19): **прогиб** отсчитывается **вверх**, а **угол поворота** – **против хода часовой стрелки**. Таким образом, **знаки** момента, прогиба и угла поворота **совпадают** и можно записать:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI}. \quad (8.35)$$

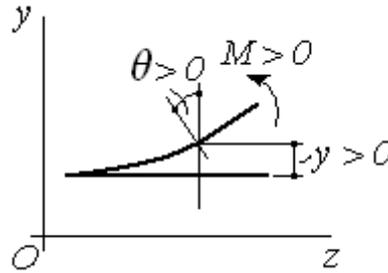


Рис. 8.19. Правило знаков.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (7.35) и получим:

- для угла поворота

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \int \frac{M}{EI} dz + C, \quad (8.36)$$

- для прогиба

$$y = \int \theta dz = \int dz \int \frac{M}{EI} dz + Cz + D. \quad (8.37)$$

Для вычисления интегралов, входящих в полученные выше выражения, необходимо:

- начало координат разместить в левой крайней точке бруса;
- брус разбить на участки и записать для каждого участка аналитические выражения для изгибающего момента;
- из граничных условий найти постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  (они зависят от условий на опорах и условий на границах участков).

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Для расчетной схемы (рис.8.20) определить прогиб и угол поворота на конце консоли (точка  $B$ ). Жесткость бруса при изгибе ( $EI$ ) считать постоянной.

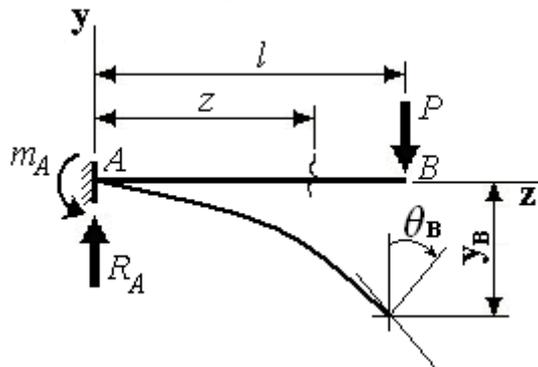


Рис. 8.20. Расчетная схема к примеру 1

Решение.

1. Определяем опорные реакции:  $R_A = P$ ;  $m_A = -Pl$ .

2. Запишем уравнение для изгибающего момента для произвольного сечения с координатой  $z$  (брус имеет один участок):

$$M = -Pl + Pz = -P(l - z).$$

3. Подставим в дифференциальное уравнение (8.35) уравнение изгибающего момента:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P(l-z)}{EI}.$$

4. Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение один раз – получим выражение для угла поворота, затем второй раз – получим выражение для прогиба в любом сечении балки:

$$\theta = \int \frac{d^2 y}{dz^2} dz = \int \frac{M}{EI} dz = -\frac{Pl}{EI} z + \frac{P}{2EI} z^2 + C,$$

$$y = \int \frac{M}{EI} dz \int dz = \int \Theta dz = -\frac{Pl}{2EI} z^2 + \frac{P}{6EI} z^3 + Cz + D.$$

5. Определим постоянные интегрирования из условий на опоре  $A$  (при  $z=0$ ):

угол поворота и прогиб на опоре  $A$  равны нулю –  $\theta=0$ ,  $y=0$ . Следовательно,  $C=0$ ,  $D=0$ .

6. С учетом равенства нулю постоянных интегрирования, получаем уравнения для угла поворота и прогиба для любой точки бруса:

$$\theta = -\frac{Pl}{EI} z + \frac{P}{2EI} z^2; \quad y = -\frac{Plz^2}{2EI} + \frac{Pz^3}{6EI}.$$

7. Определим перемещения точки  $B$  ( $z=l$ ):

$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}, \quad y_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

Знак (–) показывает, что  $y$  и  $\theta$  направлены в сторону, противоположную от положительного направления перемещений (рис. 8.19): угол поворота – по часовой стрелке, прогиб – вниз.

В данной балке был один участок. Если же участков **будет 2 и более** – то необходимо будет для **КАЖДОГО участка записывать по 2 и более дифференциальных уравнений**, т.к. для каждого из участков будет свое уравнение для изгибающего момента. Соответственно необходимо определять в 2 и более раз больше постоянных интегрирования. В связи с трудностями вычислительного характера данный метод очень трудоемок. Поэтому для определения перемещений применяются и другие методы.

**Пример 2.** Для схемы, изображенной на рис. 8.21, определить углы поворота и прогибы точек  $C$  и  $D$ . Принять  $EI$  постоянной.

Решение.

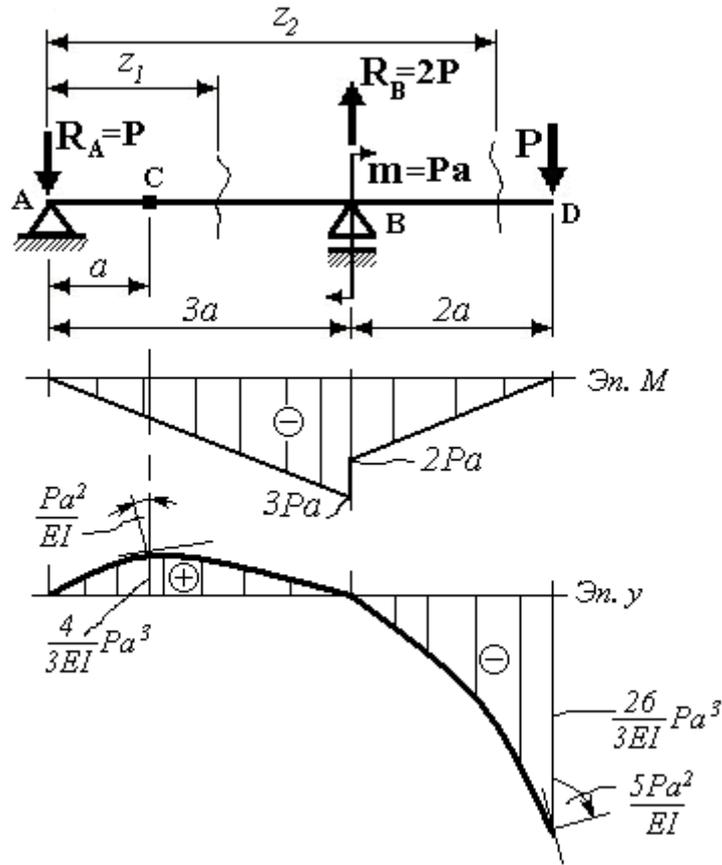
Определяем опорные реакции:  $R_A=P$ ;  $R_B=2P$ .

Балка имеет два участка. Запишем и проинтегрируем уравнения для изгибающего момента на этих участках. Причем, на втором участке интегрируем не раскрывая скобок (прием Клебша:  $\int z dz = \int z d(z-a)$ ).

Первый участок.  $0 \leq z_1 \leq 3a$ :  $M_1 = -Pz$ .

$$\theta_1 = \int \frac{M_1}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \int Pz dz = -\frac{Pz^2}{2EI} + C_1;$$

$$y_1 = \int \theta_1 dz = -\frac{1}{EI} \int \left( \frac{Pz^2}{2} + C_1 \right) dz = -\frac{Pz^3}{6EI} + C_1 z + D_1.$$

Рис. 8.21. Расчетная схема и эпюры  $M$  и  $y$  к примеру 2

Второй участок.  $3a \leq z_2 \leq 5a$ :  $M_2 = -Pz + m(z-3a)^0 + 2P(z-3a)$ .

$$\theta_2 = \int \frac{M_2}{EI} dz = -\frac{Pz^2}{2EI} + \frac{Pa}{EI}(z-3a) + \frac{2P(z-3a)^2}{2EI} + C_2;$$

$$y_2 = \int \theta_2 dz = -\frac{Pz^3}{6EI} + \frac{Pa(z-3a)^2}{2EI} + \frac{P(z-3a)^3}{3EI} + C_2 z + D_2.$$

Используя граничные условия, определяем постоянные интегрирования:

1). При  $z = 0$

из уравнения для  $y_1 \mapsto : y_A = 0$ , откуда  $D_1 = 0$ .

2). При  $z = 3a$

из уравнения для  $y_1 \mapsto : y_B = 0$ , откуда  $y_B = -\frac{P(3a)^3}{6EI} + C_1 3a = 0$ .

Следовательно  $C_1 = \frac{3Pa^2}{2EI}$ .

3). При  $z = 3a$  (на границе участков, т.е. в точке B) углы поворота и прогибы равны по величине, т.к. балка непрерывна. Поэтому

из уравнений для углов поворота с учетом их равенства

$$\theta_1 = \theta_2 \mapsto : -\frac{P(3a)^2}{2EI} + C_1 = -\frac{P(3a)^2}{2EI} + C_2. \text{ Значит } C_1 = C_2 = C = \frac{3Pa^2}{2EI}.$$

из уравнений для прогибов с учетом их равенства

$$y_1 = y_2 \mapsto : -\frac{P(3a)^3}{6EI} + C3a = -\frac{P(3a)^3}{6EI} D_2 + C3a. \text{ Значит } D_2 = 0.$$

Таким образом, получили уравнения для перемещений:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\frac{Pz^2}{2EI} + \frac{3Pa^2}{2EI}; & y_1 &= -\frac{Pz^3}{6EI} + \frac{3Pa^2}{2EI}z; \\ \theta_2 &= -\frac{Pz^3}{2EI} + \frac{Pa(z-3a)}{EI} + \frac{P(z-3a)^2}{EI} + \frac{3Pa^2}{2EI}; \\ y_2 &= -\frac{Pz^3}{6EI} + \frac{Pa(z-3a)^2}{2EI} + \frac{P(z-3a)^3}{3EI} + \frac{3Pa^2}{2EI}z.\end{aligned}$$

Определим искомые перемещения.

Для точки  $C (z = a)$

$$\theta_C = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{3Pa^2}{2EI} = \frac{Pa^2}{EI}; \quad y_C = -\frac{Pa^3}{6EI} + \frac{3Pa^3}{2EI} = \frac{4Pa^3}{3EI}.$$

**В точке  $C$  сечение поворачивается против хода часовой стрелки и перемещается в вертикальном направлении вверх.**

Для точки  $D (z = 5a)$

$$\begin{aligned}\theta_D &= \frac{P}{EI} \left( -\frac{(5a)^2}{2} + a2a + (2a)^2 + \frac{3}{2}a^2 \right) = -\frac{5Pa^2}{EI}; \\ y_D &= \frac{P}{EI} \left( -\frac{(5a)^3}{6} + \frac{a(2a)^2}{2} + \frac{(2a)^3}{3} + \frac{3}{2}a^2 5a \right) = -\frac{26Pa^3}{3EI}.\end{aligned}$$

**В точке  $D$  сечение поворачивается по ходу часовой стрелки и перемещается в вертикальном направлении вниз.**

**8.5.3. Порядок определения перемещений.** Перемещения методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии определяются в следующем порядке.

1. Составляем выражения моментов для каждого из участков (слева направо). Начало координат – левая крайняя точка.

НЕ ЗАБЫВАТЬ ПРО РЕАКЦИИ И ОПОРНЫЕ МОМЕНТЫ.

2. Выражения для изгибающего момента на каждом из участков подставляем в подынтегральные выражения.

3. Проводим интегрирование не раскрывая скобок.

4. Определяем постоянных интегрирования, используя граничные условия.

5. Найденные значения постоянных подставляем в общие выражения (см. п.2).

6. Выполняем условие задачи:

подставляем координаты  $z$  точек заданных точек в выражения для  $\theta_z$  и  $y_z$ .

**8.5.4. Условие жесткости.** При изгибе условие жесткости записывается в виде

$$f \leq [f] = \left( \frac{1}{100} \div \frac{1}{600} L \right), \quad (8.38)$$

где  $f$  – стрела прогиба (максимальный прогиб),

$[f]$  – допускаемое значение стрелы прогиба,

$L$  – длина пролета балки.

**8.5.5. Типы расчета на жесткость.** Используя условие жесткости проводят три типа расчетов:

- а) проверка жесткости в соответствии с неравенством;
- б) проектировочный расчет;
- в) определение допускаемой нагрузки (грузоподъемности).

### 8.6. Метод начальных параметров.

При определении перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии, для каждого участка балки необходимо составлять уравнения изгибающего момента, интегрировать его и определять постоянные интегрирования. Это представляет **значительные трудности при большом количестве участков.**

Рассматриваемый ниже **МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**, разработанный Н.П. Пузыревским, П.Г. Кулаковским, Н.К. Снитко, Н.И. Безуховым и А.А. Уманским, значительно упрощает решение задачи определения перемещений.

Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием сил и реакций, (рис. 8.22). **Жесткость сечения балки  $EI$  постоянна по всей ее длине.**

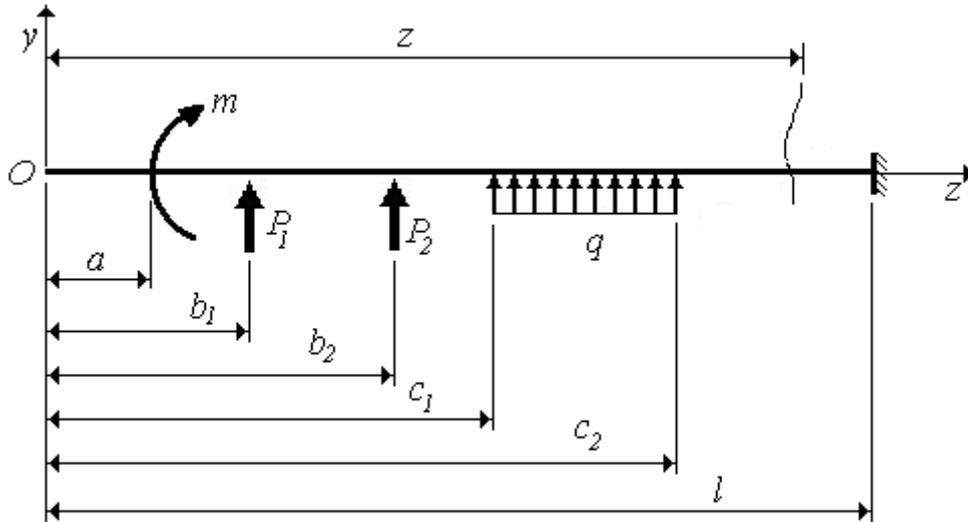


Рис. 8.22. К выводу уравнений метода начальных параметров

1. Начало координат совместим с левым концом балки.
2. Составим выражение для изгибающего момента, возникающего в сечении на расстоянии  $z$  от начала координат. В это уравнение **входят все нагрузки**, приложенные к балке **левее от сечения**.
3. Распределенная нагрузка обрывается, не доходя до правого крайнего сечения, поэтому в уравнении для изгибающего момента действие распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  необходимо записать в виде двух слагаемых (на рис. 8.23 пунктиром показано продолжение действующей и компенсирующей нагрузок  $q$ ):

$$+ q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}. \quad (8.39)$$

Если **распределенная нагрузка обрывается** в сечении  $n-n$ , расположенном левее сечения с абсциссой  $z$ , то ее следует **продолжить до правого конца балки**. **Одновременно** с этим на участке от сечения  $n-n$  до правого конца балки необходимо приложить нагрузку той же величины, но **обратного знака** (компенсирующую).

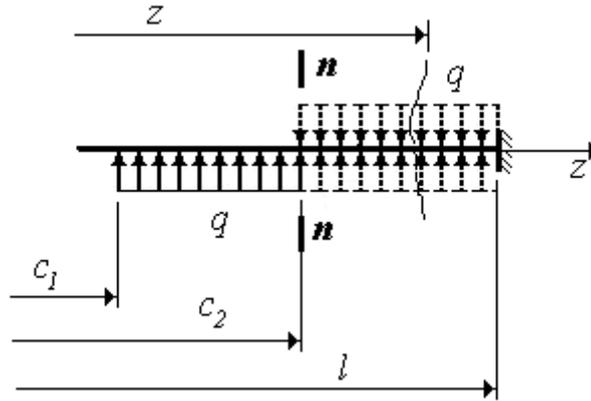


Рис. 7.23. К учету особенностей приложения распределенной нагрузки

Тогда уравнение для изгибающего момента можно записать в виде:

$$M_z = m(z-a)^0 + P_1(z-b_1) + P_2(z-b_2) + q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}$$

Если в полученном уравнении:

- сумму  $P_1(z-b_1) + P_2(z-b_2)$  заменить на  $\sum P_i(z-b_i)$ ;
- сумму  $q \frac{(z-c_1)^2}{2} - q \frac{(z-c_2)^2}{2}$  – на  $\sum q_i \frac{(z-c_i)^2}{2}$ ;
- и, по аналогии, сумму моментов представить в виде  $\sum m_i(z-a_i)^0$ ,

то уравнение для изгибающего момента в произвольном сечении на последнем участке будет действительно при любом числе моментов, сосредоточенных сил и интенсивностей распределенных нагрузок, приложенных левее сечения с координатой  $z$ :

$$M = \sum m_i(z-a_i)^0 + \sum P_i(z-b_i) + \sum q_i \frac{(z-c_i)^2}{2}$$

Здесь:

$i$  – номер нагрузки, приложенной к балке;

$a_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены моменты;

$b_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены сосредоточенные силы;

$c_i$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых начинается действие распределенных нагрузок.

Поскольку  $1=1!$ ;  $1 \times 2=2!$ ;  $1 \times 2 \times 3=3!$ ;  $1 \times 2 \times 3 \times 4=4!$  последнее выражение можно представить в виде:

$$M = \sum m_i(z-a_i)^0 + \sum \frac{P_i(z-b_i)}{1!} + \sum \frac{q_i(z-c_i)^2}{2!}. \quad (8.40)$$

Подставим (8.40) в приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (8.35) и, с учетом постоянства жесткости сечения балки  $EI$ , получим

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = EI y'' = M = \sum m_i (z - a_i)^0 + \sum \frac{P_i (z - b_i)}{1!} + \sum \frac{q_i (z - c_i)^2}{2!}$$

(7.41)

Интегрируем полученное уравнение не раскрывая скобок – по  $d(z - a)$ :

Иначе говоря,  $\int \sum M dz$  записываем в виде  $\int M (z - a)^0 d(z - a)$ , что скажется только на величине  $C_m$ .

Интегрируя один раз, получим выражение для угла поворота, второй раз – для прогиба:

$$EI y' = EI \theta = \int M dz = \sum m_i \frac{(z - a_i)}{1!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{3!} + C_m ;$$

(7.42)

$$EI y = \int EI \theta dz = \sum m_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!} + C_m z + D_m ;$$

43)

где  $C_m$  и  $D_m$  – постоянные интегрирования, которые относятся к произвольному участку  $m$  балки.

Определим эти постоянные интегрирования. Для этого рассмотрим два соседних участка балки  $m$  и  $m+1$  (рис. 7.24).

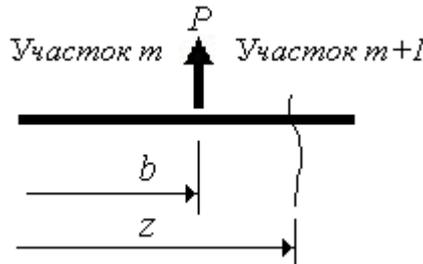


Рис. 7.24. К определению постоянных интегрирования

Для участка  $m$ :

$$EI \theta_m = A_z + C_m ; \quad EI y_m = B_z + C_m z + D_m$$

Здесь  $A_z$  и  $B_z$  – правые части уравнений (7.42 и 7.43) без членов, содержащих постоянные интегрирования.

Для участка  $m+1$ :

$$EI \theta_{m+1} = A_z + P \frac{(z - b)^2}{2!} + C_{m+1} ; \quad EI y_{m+1} = B_z + P \frac{(z - b)^3}{3!} + C_{m+1} z + D_{m+1} .$$

Но на границе участков, т.е. при  $z = b$

$$EI \theta_m = EI \theta_{m+1} ; \quad EI y_m = EI y_{m+1} .$$

Следовательно

$$A_b + C_m = A_b + C_{m+1} \text{ и } C_m = C_{m+1} ;$$

$$B_b + C_m b + D_m = B_b + C_{m+1} b + D_{m+1} \text{ и } D_m = D_{m+1} .$$

Обобщая, для участков  $m+1$  и  $m+2$  получим  $C_{m+1} = C_{m+2}$ ;  $D_{m+1} = D_{m+2}$ .

И окончательно  $C_m = C_{m+1} = C_{m+2} = \dots = C$ ;  $D_m = D_{m+1} = D_{m+2} = \dots + D$ .

Таким образом, постоянные интегрирования  $C$  и  $D$ , входящие в соотношения (8.42) и (8.43) одинаковы для всех участков (от первого до последнего) балки.

Для определения  $C$  и  $D$  составим выражения  $\theta_0$  и  $y_0$  для левого конца балки (для сечения с координатой  $z = 0$ ). Для этого сечения все расстояния  $a, b, c$  будут равны нулю, следовательно

$$EI \theta_0 = C; \quad EI y_0 = D. \quad (8.44)$$

Тогда уравнения (8.42) и (8.43):

**Уравнения метода начальных параметров**

$$EI \theta = EI \theta_0 + \sum m_i \frac{z - a_i}{1!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^2}{2!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^3}{3!}; \quad (8.45)$$

$$EI y = EI y_0 + EI \theta_0 z + \sum m_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(z - b_i)^3}{3!} + \sum q_i \frac{(z - c_i)^4}{4!} \quad (8.46)$$

Нагрузки  $P$  и  $m$ , приложенные к левому крайнему концу балки (начальное сечение балки), а также перемещения  $\theta_0$  и  $y_0$  этого конца называются начальными параметрами. Используя значения этих параметров по уравнениям (8.45) и (8.46) можно определить углы поворота  $\theta$  и прогибы  $y$  любых сечений балки.

При определении углов поворота и прогибов:

- **СЛЕДУЕТ УЧИТЫВАТЬ ВСЕ** нагрузки, приложенные к балке **СЛЕВА ОТ СЕЧЕНИЯ**;
- **НЕЛЬЗЯ** включать нагрузки, расположенные **ПРАВЕЕ ОТ СЕЧЕНИЯ**;
- обычно записывают уравнения для всей балки, вертикальной чертой отделяя слагаемые, входящие в каждый из участков;
- в нижней части черты ставится номер участка:  $|_I, |_{II}, |_{III}$  и так далее.

Для определения начальных параметров для балок используют граничные условия – условия на опорах (рис. 8.25).

В заделке отсутствуют угловые и линейные перемещения, а на шарнирных опорах – только линейные, поэтому (см. рис. 7.25):

- на схеме  $a$ ) – при  $z = 0$  (т.  $O$ ):  $\theta_0 = 0, y_0 = 0$ ;
- на схеме  $b$ ) – при  $z = l$  (т.  $A$ ):  $\theta_A = 0, y_A = 0$ ;
- на схеме  $в$ ) – при  $z = 0$  (т.  $O$ ):  $y_0 = 0$ ; при  $z = l$ , (т.  $A$ ):  $y_A = 0$ ;
- на схеме  $г$ ) – при  $z = l_1$  (т.  $B$ ):  $y_B = 0$ ; при  $z = l + l_1$ , (т.  $A$ ):  $y_A = 0$ ;
- на схеме  $д$ ) – при  $z = 0$  (т.  $O$ ):  $y_0 = 0$ ; при  $z = l$ , (т.  $A$ ):  $y_A = 0$ .

Алгоритм решения задачи по определению перемещений методом начальных параметров следующий:

1. Для заданной схемы балки определяются опорные реакции.
2. Балка разбивается на участки (как при построении эпюр).
3. Записываются уравнения начальных параметров для прогиба – чаще всего, (или для прогиба и угла поворота или только для угла поворота) для последнего участка (в общем виде) в соответствии с формулами (8.45 и 8.46).
4. В соответствии с рис. 8.25 записывается система уравнений и определяются начальные параметры.
5. Записываются и решаются уравнения для определения искомых перемещений.

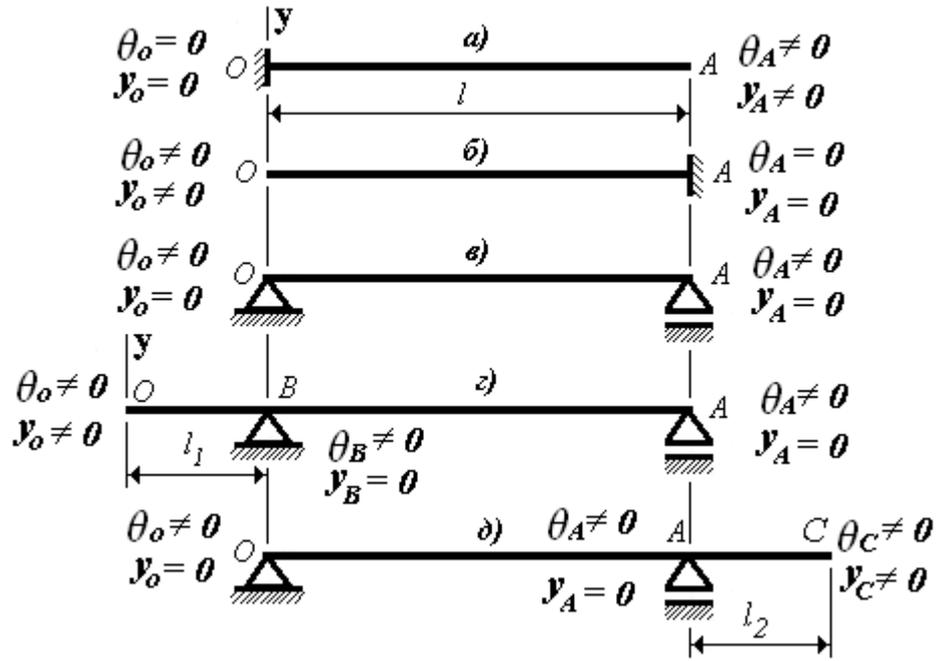


Рис. 8.25. Определение начальных параметров по условиям на опорах