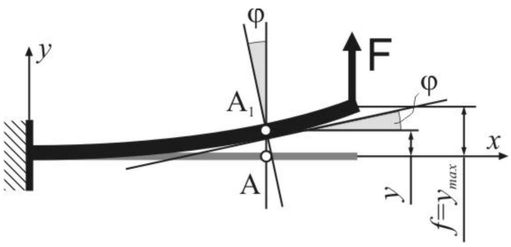
11. ДЕФОРМАЦИЯ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

11.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим деформацию балки при плоском изгибе. Ось балки под действием нагрузки искривляется в плоскости действия сил (плоскость $x0y$), при этом поперечные сечения поворачиваются и смещаются на некоторую величину. Искривленная ось балки при изгибе называется **изогнутой осью** или **упругой линией**.



Деформацию балок при изгибе будем описывать двумя параметрами:

1) **прогиб** (y) – смещение центра тяжести сечения балки по направлению, перпендикулярному к ее оси.

Не путать прогиб y с координатой y точек сечения балки!

Наибольший прогиб балки называется с т р е л о й п р о г и б а ($f=y_{max}$);

2) **угол поворота сечения** (φ) – угол, на который сечение поворачивается относительно своего первоначального положения (или угол между касательной к упругой линии и первоначальной осью балки).

В общем случае величина прогиба балки в данной точке является функцией координаты x и может быть записана в виде следующего уравнения:

$$y = y(x).$$

Тогда угол между касательной к изогнутой оси балки и осью x будет определяться из следующего выражения:

$$\operatorname{tg}\ \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

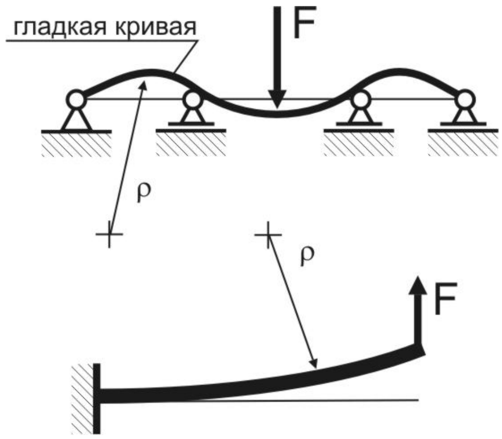
Ввиду малости углов и перемещений, можем считать, что

$$\varphi \approx \frac{dy}{dx}$$

угол поворота сечения есть первая производная от прогиба балки по абсциссе сечения.

11.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Исходя из физической природы явления изгиба, можем утверждать, что изогнутая ось непрерывной балки должна быть непрерывной и гладкой (не имеющей изломов) кривой. При этом деформация того или иного участка балки определяется искривлением его упругой линии, то есть кривизной оси балки.



Ранее (формула (10.8), лекция 10) нами была получена формула для определения кривизны бруса (1/ρ) при изгибе

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{E\cdot J_z}.$$

С другой стороны, из курса высшей математики известно, что уравнение кривизны плоской кривой выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\pm\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Приравняв правые части данных выражений, получим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, которое называется точным уравнением изогнутой оси бруса

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_z}{E\cdot J_z}.$$

В координатной системе прогибов $x0y$, когда ось y направлена вверх, знак момента определяет знак второй производной от y по x.

Интегрирование данного уравнения, очевидно, представляет некоторые трудности. Поэтому его, как правило, записывают в упрощенной форме, пренебрегая величиной в скобках по сравнению с единицей.

Тогда **дифференциальное уравнение упругой линии балки** будем рассматривать в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}. \tag{11.1}$$

Решение дифференциального уравнения (11.1) найдем, интегрируя обе его части по переменной x:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \int_l \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1, \tag{11.2}$$

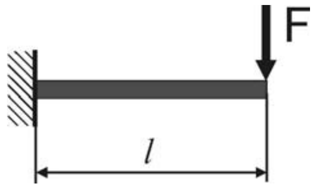
$$y = \iint \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 \cdot x + D_1. \tag{11.3}$$

Постоянные интегрирования C_1, D_1 находят из граничных условий – условий закрепления балки, при этом для каждого участка балки будут определяться свои постоянные.

Рассмотрим процедуру решения данных уравнений на конкретном примере.

Дано:

Консольная балка длиной l, загруженная поперечной силой F. Материал балки (E), форму и размеры ее сечения (J_z) также считаем известными.



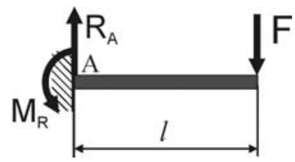
Определить закон изменения угла поворота $\varphi(x)$ и прогиба $y(x)$ балки по ее длине и их значения в характерных сечениях.

Решение

а) определим реакции в заделке

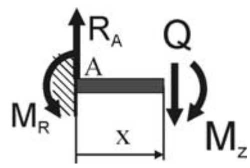
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = F,$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_R = -F \cdot l.$$



б) методом мысленных сечений определим внутренний изгибающий момент

$$M_z(x) = R_A \cdot x - M_R = F \cdot x - F \cdot l.$$



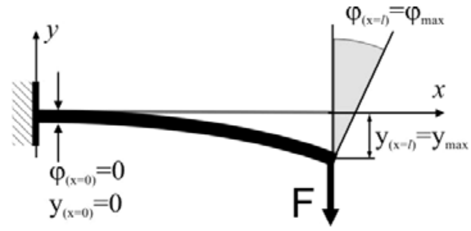
в) определим угол поворота сечений балки

$$\varphi(x) = \int \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 = \int \frac{F \cdot x - F \cdot l}{E \cdot J_z} \cdot dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J_z} - \frac{F \cdot l \cdot x}{E \cdot J_z} + C_1.$$

Постоянную C_1 найдем из условий закрепления, а именно – в жесткой заделке угол поворота равен нулю, тогда

$$\varphi(x=0)=0 \Rightarrow \qquad C_1=0.$$



Найдем угол поворота свободного конца балки ($x=l$)

$$\varphi(x=l)=-\frac{F\cdot l^2}{2\cdot E\cdot J_z}.$$

Знак «минус» показывает, что сечение повернулось по часовой стрелке.

г) определим прогибы балки

$$y(x)=\int\varphi\cdot dx+C_2=\int\left(\frac{F\cdot x^2}{2\cdot E\cdot J_z}-\frac{F\cdot l\cdot x}{E\cdot J_z}\right)\cdot dx+D_1 \Rightarrow$$

$$y(x)=\frac{F\cdot x^3}{2\cdot 3\cdot E\cdot J_z}-\frac{F\cdot l\cdot x^2}{2\cdot E\cdot J_z}+D_1.$$

Постоянную D_1 найдем из условий закрепления, а именно – в жесткой заделке прогиб равен нулю, тогда

$$y(x=0)=0 \Rightarrow \qquad D_1=0.$$

Найдем прогиб свободного конца балки ($x=l$)

$$y(x=l)=-\frac{1}{3}\frac{F\cdot l^3}{E\cdot J_z}.$$

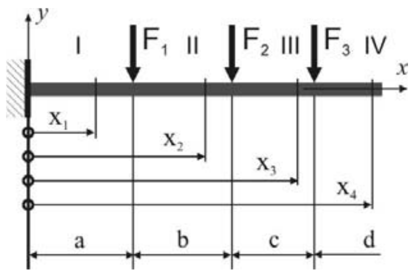
Знак «минус» показывает, что сечение опустилось вниз.

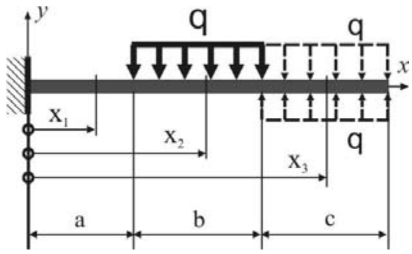
11.3. Универсальное уравнение упругой линии. Метод начальных параметров

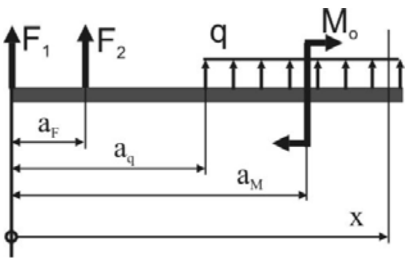
Использование изложенной техники определения перемещений для балок, имеющих несколько участков, оказывается достаточно трудоемким, так как для n участков число произвольных констант (C и D) возрастает до $2n$. Для уменьшения вычислительной работы в подобных случаях был разработан ряд методов, в том числе и м е т о д н а ч а л ь н ы х п а р а м е т р о в, позволяющий при любом числе участков свести решение к отысканию всего двух констант – прогиба и угла поворота в начале координат.

Для реализации метода начальных параметров необходимо при составлении уравнения моментов по участкам и интегрировании этого уравнения придерживаться следующих правил:

1) начало координат необходимо выбирать общим для всех участков в крайней левой (или правой) точке балки;
2) все составляющие уравнения моментов на предыдущем участке должны сохраняться неизменными в уравнении моментов последующих участков;
3) в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до конца балки, а для восстановления действительных условий нагружения вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления
4) интегрировать уравнения на всех участках следует, не раскрывая скобок.







Рассмотрим некоторый отрезок балки, нагруженной произвольной системой сил и моментов (реакции опор также представляем как внешние силы), и составим для нее уравнение моментов в произвольном сечении с соблюдением указанных правил:

$$M(x) = F_1 \cdot x + F_2 \cdot \left(x - a_{F_2}\right) + q \cdot \frac{\left(x - a_q\right)^2}{2} + M_0 .$$

Группируя подобные слагаемые, запишем данное уравнение в самом общем виде:

$$M(x) = \sum M_i \cdot (x - a_{M_i})^0 + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^1}{1} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^2}{2} . \qquad (11.4)$$

В формуле (11.4): a_M, a_F, a_q – координаты точки приложения внешнего момента, силы или начало распределенной нагрузки. Следует помнить, что сомножитель (x–a) должен быть всегда положительным, слагаемые с отрицательными значениями (x–a) отбрасываются.
Здесь заметим, что сомножитель $(x{-}a_M)^0$ равен единице, но он необходим для сохранения подобия слагаемых при последующем интегрировании.

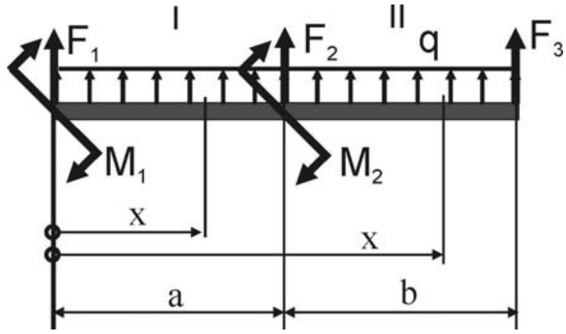
Подставляя формулу (11.4) в выражения (11.2), можно записать **универсальные уравнения** для определения углов и прогибов балки при изгибе:

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int M(x) \cdot dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[\sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^1}{1} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^2}{1 \cdot 2} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^3}{2 \cdot 3} \right] + C_1 ;$$

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int \varphi(x) \cdot dx + C_1 \cdot x + D_1 \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z}\left[\sum M_i \frac{(x-a_{M_i})^2}{2} + \sum F_i \frac{(x-a_{F_i})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sum q_i \frac{(x-a_{q_i})^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right] + C_1 x + D_1.$$



Покажем, что C_1 и D_1 являются единственными константами, причем

$$C_1 = \varphi(x=0) = \varphi_0, \qquad D_1 = y(x=0) = y_0$$

где φ_0, y_0 – угол поворота и прогиб балки в начале координат.

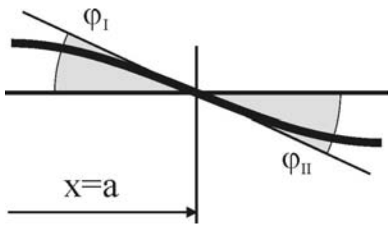
Рассмотрим два участка балки, загруженной произвольной нагрузкой. Составим для обоих участков универсальное уравнение углов:

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot x + F_1 \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right] + C_{\mathrm{I}},$$

$$\varphi_{\mathrm{II}} = \frac{1}{E \cdot J_z}\left[M_1 \cdot x + M_2 (x-a) + F_1 \frac{x^2}{2} + F_2 \frac{(x-a)^2}{2} + q \frac{x^3}{2 \cdot 3} - q' \frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3}\right] + C_{\mathrm{II}}.$$

Для определения постоянных интегрирования C_{I} и C_{II} воспользуемся граничными условиями. Тогда, при x=0 (из первого уравнения):

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_0 = C_{\mathrm{I}}.$$



Очевидно, что на границе участков (x=a) угол поворота должен быть одинаков, то есть при x=a должно быть $\varphi_{\mathrm{I}}(_{x=a})=\varphi_{\mathrm{II}}(_{x=a})$:

$$\varphi_{\mathrm{I}}\left(_{x=a}\right) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot a + F_1 \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot \frac{a^3}{2 \cdot 3}\right] + C_{\mathrm{I}},$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}\left(_{x=a}\right) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[M_1 \cdot a + F_1 \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot \frac{a^3}{2 \cdot 3}\right] + C_{\mathrm{II}},$$

тогда

$$C_{\mathrm{I}} = C_{\mathrm{II}} = \varphi_0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнений, описывающих прогиб балки на двух соседних участках и на их границе, найдем, что

$$D_{\mathrm{I}} = D_{\mathrm{II}} = y_0.$$

Запишем окончательно **универсальные уравнения метода начальных параметров**:

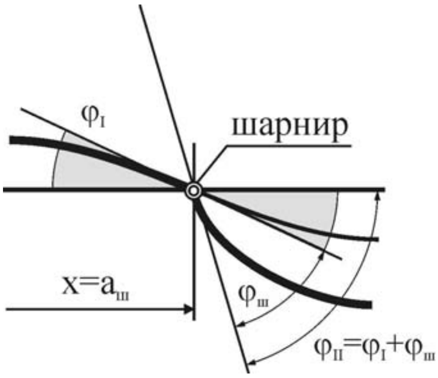
$$Q(x)=\sum F_i+\sum q_i\cdot(x-a_{q_i});$$

$$M(x)=\sum M_i+\sum F_i\cdot\frac{(x-a_{F_i})^1}{1!}+\sum q_i\cdot\frac{(x-a_{q_i})^2}{2!};$$

$$\varphi(x)=\varphi_0+\varphi_{\text{ш}}+\frac{1}{E\cdot J_z}\cdot\left[\sum M_i\cdot\frac{(x-a_{M_i})^1}{1!}+\sum F_i\cdot\frac{(x-a_{F_i})^2}{2!}+\sum q_i\cdot\frac{(x-a_{q_i})^3}{3!}\right];$$

$$y(x)=y_0+\varphi_0 x+\varphi_{\text{ш}}\left(x-a_{\text{ш}}\right)+$$

$$+\frac{1}{E\cdot J_z}\left[\sum M_i\frac{(x-a_{M_i})^2}{2!}+\sum F_i\frac{(x-a_{F_i})^3}{3!}+\sum q_i\frac{(x-a_{q_i})^4}{4!}\right].$$



Величина $\varphi_{\text{ш}}$ – угол поворота в промежуточном (подвесном) шарнире, при этом $a_{\text{ш}}$ – координата шарнира.

Отметим, что при решении задач удобно записать универсальные уравнения сначала для наиболее удаленного от начала координат участка, тогда уравнения для предыдущих участков легко получить, вычеркивая из полученного уравнения члены, учитывающие нагрузку на последующих участках.