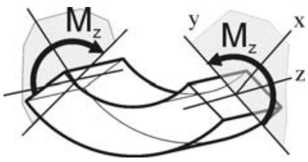
Плоский поперечный изгиб балок. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости внутренних усилий. Правила проверки эпюр внутренних усилий при изгибе. Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Расчет на прочность по нормальным и касательным напряжениям.

10. ПРОСТЫЕ ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

10.1. Общие понятия и определения

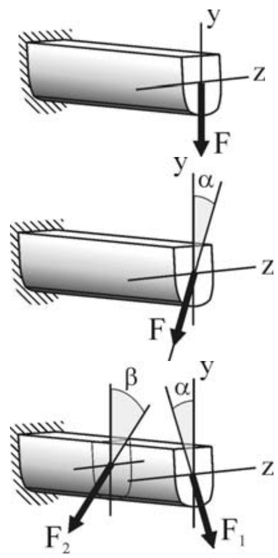
Изгиб – это такой вид нагружения, при котором стержень загружен моментами в плоскостях, проходящих через продольную ось стержня.



Стержень, работающий на изгиб, называется балкой (или брусом). В дальнейшем будем рассматривать прямолинейные балки, поперечное сечение которых имеет хотя бы одну ось симметрии.

В сопротивлении материалов различают изгиб плоский, косой и сложный.

Плоский изгиб – изгиб, при котором все усилия, изгибающие балку, лежат в одной из плоскостей симметрии балки (в одной из главных плоскостей).



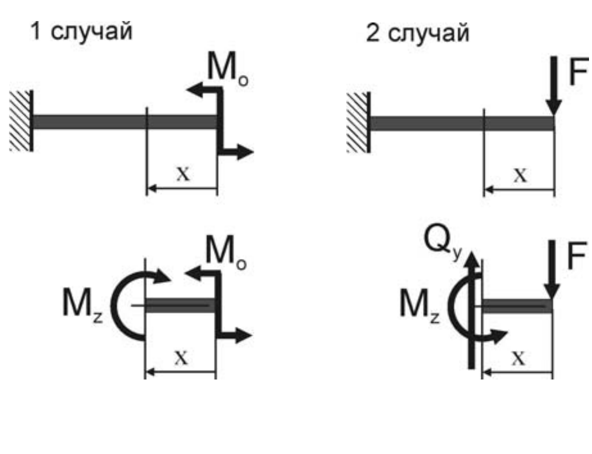
Главными плоскостями инерции балки называют плоскости, проходящие через главные оси поперечных сечений и геометрическую ось балки (ось x).

Косой изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции.

Сложный изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях.

Далее будем рассматривать плоский изгиб, то есть все силы будем прилагать в плоскости симметрии балки.

10.2. Определение внутренних усилий при изгибе



Рассмотрим два характерных случая изгиба: в первом – консольная балка изгибается сосредоточенным моментом M_o; во втором – сосредоточенной силой F.

Используя метод мысленных сечений и составляя уравнения равновесия для отсеченных частей балки, определим внутренние усилия в том и другом случае:

1 случай

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad Q_y = 0;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \qquad M_z = M_o.$$

2 случай

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad Q_y = F;$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \qquad M_z = -F \cdot \text{x}.$$

Остальные уравнения равновесия, очевидно, тождественно равны нулю.

Таким образом, в общем случае плоского изгиба в сечении балки из шести внутренних усилий возникает два – **изгибающий момент** M_z и **поперечная сила** Q_y (или при изгибе относительно другой главной оси – изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z).

При этом, в соответствии с двумя рассмотренными случаями нагружения, плоский изгиб можно подразделить на ч и с т ы й и п о п е р е ч н ы й .

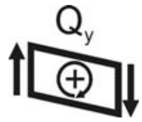
Чистый изгиб – плоский изгиб, при котором в сечениях стержня из шести внутренних усилий возникает только одно – изгибающий момент (см. первый случай).

Поперечный изгиб – изгиб, при котором в сечениях стержня кроме внутреннего изгибающего момента возникает и поперечная сила (см. второй случай).

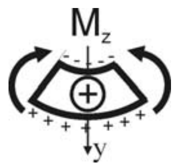
Строго говоря, к простым видам сопротивления относится лишь чистый изгиб; поперечный изгиб относят к простым видам сопротивления условно, так как в большинстве случаев (для достаточно длинных балок) действием поперечной силы при расчетах на прочность можно пренебречь.

При определении внутренних усилий будем придерживаться следующего правила знаков:

1) поперечная сила Q_y считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый элемент балки по часовой стрелке;

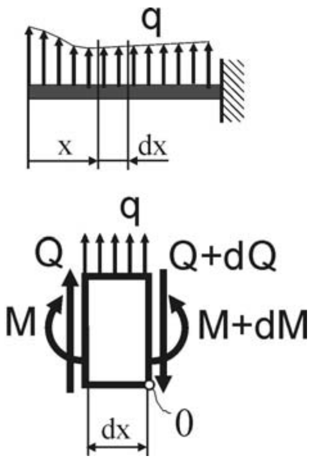


2) изгибающий момент M_z считается положительным, если при изгибе элемента балки верхние волокна элемента оказываются сжатыми, а нижние – растянутыми (правило зонта).



Таким образом, решение задачи по определению внутренних усилий при изгибе будем выстраивать по следующему плану: 1) на первом этапе, рассматривая условия равновесия конструкции в целом, определяем, если это необходимо, неизвестные реакции опор (отметим, что для консольной балки реакции в заделке можно и не находить, если рассматривать балку со свободного конца); 2) на втором этапе выделяем характерные участки балки, принимая за границы участков точки приложения сил, точки изменения формы или размеров балки, точки закрепления балки; 3) на третьем этапе определяем внутренние усилия в сечениях балки, рассматривая условия равновесия элементов балки на каждом из участков.

Установим некоторые взаимосвязи между внутренними усилиями и внешними нагрузками при изгибе, а также характерные особенности эпюр Q и M, знание которых облегчит построение эпюр и позволит контролировать их правильность. Для удобства записи будем обозначать: $M \equiv M_z$, $Q \equiv Q_y$.



Выделим на участке балки с произвольной нагрузкой в месте, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент dx. Так как вся балка находится в равновесии, то и элемент dx будет находиться в равновесии под действием приложенных к нему поперечных сил, изгибающих моментов и внешней нагрузки. Поскольку Q и M в общем случае меняются вдоль оси балки, то в сечениях элемента dx будут возникать поперечные силы Q и $Q+dQ$, а также изгибающие моменты M и $M+dM$. Из условия равновесия выделенного элемента получим

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad Q + q \cdot dx - \left(Q + dQ\right) = 0;$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow \qquad M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - \left(M + dM\right) = 0.$$

Первое из двух записанных уравнений дает условие

$$q = \frac{dQ}{dx}. \qquad (10.1)$$

Из второго уравнения, пренебрегая слагаемым $q \cdot dx \cdot (dx/2)$ как бесконечно малой величиной второго порядка, найдем

$$Q = \frac{dM}{dx}. \qquad (10.2)$$

Рассматривая выражения (10.1) и (10.2) совместно можем получить

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}. \qquad (10.3)$$

Соотношения (10.1), (10.2) и (10.3) называют **дифференциальными зависимостями Д. И. Журавского при изгибе**.

Анализ приведенных выше дифференциальных зависимостей при изгибе позволяет установить некоторые особенности (правила) построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил:

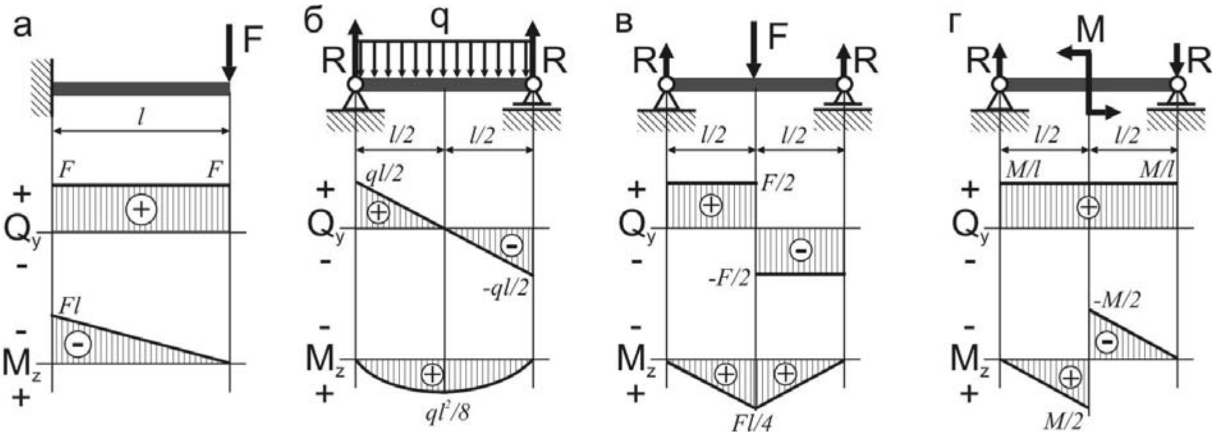
а – на участках, где нет распределенной нагрузки q, эпюры Q ограничены прямыми, параллельными базе, а эпюры M – наклонными прямыми;

б – на участках, где к балке приложена распределенная нагрузка q, эпюры Q ограничены наклонными прямыми, а эпюры M – квадратичными параболами. При этом, если эпюру M строим «на растянутом волокне», то выпуклость параболы будет направлена по направлению действия q, а экстремум будет расположен в сечении, где эпюра Q пересекает базовую линию;

в – в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенная сила на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении данной силы, а на эпюре M – перегибы, острием направленные в направлении действия этой силы;

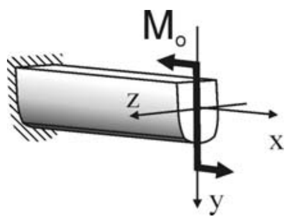
г – в сечениях, где к балке прикладывается сосредоточенный момент на эпюре Q изменений не будет, а на эпюре M – скачки на величину этого момента;

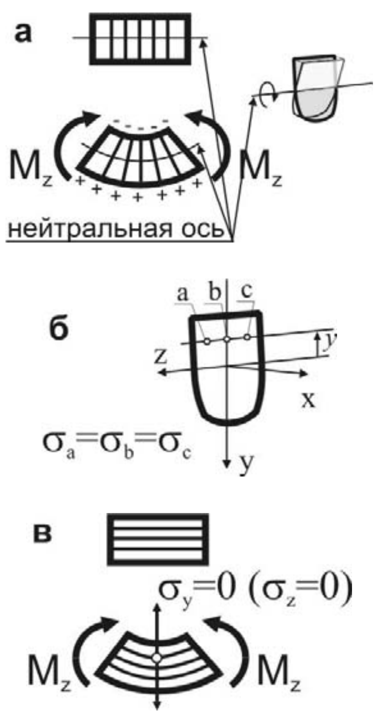
д – на участках, где Q>0, момент M возрастает, а на участках, где Q<0, момент M убывает (см. рисунки а–г).



10.4. Нормальные напряжения при чистом изгибе прямого бруса

Рассмотрим случай чистого плоского изгиба балки и выведем формулу для определения нормальных напряжений для данного случая. Отметим, что в теории упругости можно получить точную зависимость для нормальных напряжений при чистом изгибе, если же решать эту задачу методами сопротивления материалов необходимо ввести некоторые допущения.





Таких гипотез при изгибе три:

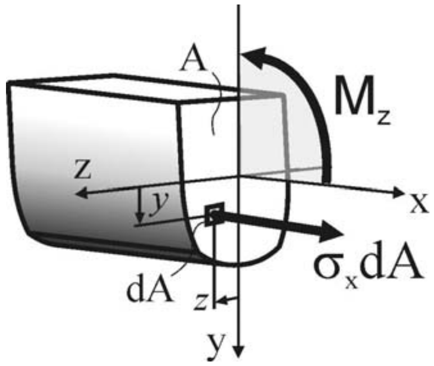
а – гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) – сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации, а лишь поворачиваются относительно некоторой линии, которая называется нейтральной осью сечения балки. При этом волокна балки, лежащие с одной стороны от нейтральной оси будут растягиваться, а с другой – сжиматься; волокна, лежащие на нейтральной оси своей длины не изменяют;

б – гипотеза о постоянстве нормальных напряжений – напряжения, действующие на одинаковом расстоянии y от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;

в – гипотеза об отсутствии боковых давлений – соседние продольные волокна не давят друг на друга.

Статическая сторона задачи

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях балки, рассмотрим, прежде всего, с т а т и ч е с к у ю с т о р о н у з а д а ч и. Применяя метод мысленных сечений и составляя уравнения равновесия для отсеченной части балки, найдем внутренние усилия при изгибе. Как было показано ранее, единственным внутренним усилием, действующим в сечении бруса при чистом изгибе, является внутренний изгибающий момент, а значит здесь возникнут связанные с ним нормальные напряжения.



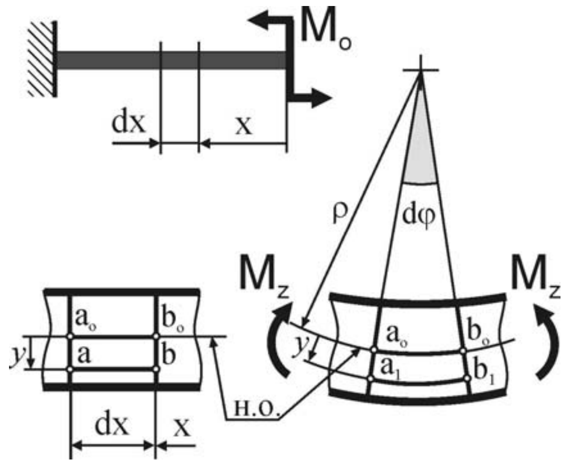
Связь между внутренними усилиями и нормальными напряжениями в сечении балки найдем из рассмотрения напряжений на элементарной площадке dA, выделенной в поперечном сечении A балки в точке с координатами y и z (ось y для удобства анализа направлена вниз):

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N = 0 \Rightarrow \quad \int_A \sigma_x \cdot dA = 0; \\ &\sum M_y = 0 \Rightarrow \quad M_y = 0 \Rightarrow \quad \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = 0; \\ &\sum M_z = 0 \Rightarrow \quad M_z = M_o \Rightarrow \quad \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = M_o. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Как видим, задача является внутренне статически неопределимой, так как неизвестен характер распределения нормальных напряжений по сечению. Для решения задачи рассмотрим геометрическую картину деформаций.

Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим деформацию элемента балки длиной dx, выделенного из изгибаемого стержня в произвольной точке с координатой x. Учитывая принятую ранее гипотезу плоских сечений, после изгиба сечения балки повернуться относительно нейтральной оси (н.о.) на угол $d\varphi$, при этом волокно ab, отстоящее от нейтральной оси на расстояние y, превратится в дугу окружности a_1b_1, а его длина изменится на некоторую величину. Здесь напомним, что длина волокон, лежащих на нейтральной оси, не изменяется, а потому дуга a_0b_0 (радиус кривизны которой обозначим ρ) имеет ту же длину, что и отрезок a_0b_0 до деформации $a_0b_0=dx$.



Найдем относительную линейную деформацию ε_x волокна ab изогнутой балки:

$$\varepsilon_x = \frac{a_1b_1 - a_0b_0}{a_0b_0} = \frac{(\rho + y)\cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}. \qquad (10.5)$$

Физическая сторона задачи

Учитывая, что, в соответствии с гипотезой об отсутствии боковых давлений, σ_y=σ_z=0, запишем закон Гука для изгиба в виде

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x . \qquad (10.6)$$

Математическая сторона задачи

Из формулы (10.6) с учетом (10.5), получим закон распределения нормальных напряжений по сечению балки:

$$\sigma_x = E \cdot \frac{y}{\rho}. \qquad (10.7)$$

Подставляя (10.7) в каждое из уравнений (10.4), имеем следующие соотношения:

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = 0 \Rightarrow \qquad \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \Rightarrow \qquad S_z = 0,$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = 0 \Rightarrow \qquad \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = 0 \Rightarrow \qquad J_{yz} = 0,$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = M_0 \Rightarrow \qquad \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M_z \Rightarrow \qquad \frac{E}{\rho} \cdot J_z = M_z.$$

Из анализа первого и второго полученных выражений следует, что оси y и z являются главными центральными осями сечения, а нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

Из последнего равенства получим формулу для определения **кривизны бруса** ($1/\rho$) при изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}, \qquad (10.8)$$

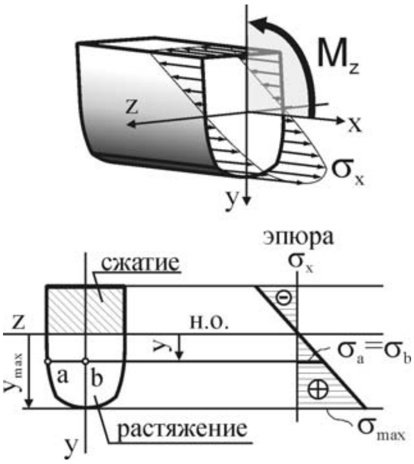
подставляя которую в выражение (10.7), получим формулу определения **нормальных напряжений при изгибе**:

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{J_z}. \qquad (10.9)$$

Из анализа полученного уравнения следует, что нормальные напряжения при изгибе равны нулю в точках, лежащих на нейтральной оси, и достигают экстремальных значений на поверхности балки, при $y=|y|_{max}$.

Максимальные нормальные напряжения при изгибе найдем по формуле:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z| \cdot |y|_{max}}{J_z} = \frac{|M_z|}{W_z},$$



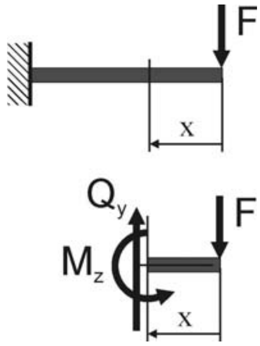
где W_z – осевой момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{max}}.$$

Таким образом, в случае изгиба **условие прочности по нормальным напряжениям** может быть записано в следующем виде (для материала балки, одинаково сопротивляющегося растяжению-сжатию):

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma].$$

10.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе прямого бруса



При плоском поперечном изгибе, когда в сечениях балки действуют и изгибающий момент M и поперечная сила Q, возникают не только нормальные σ, но и касательные напряжения τ.

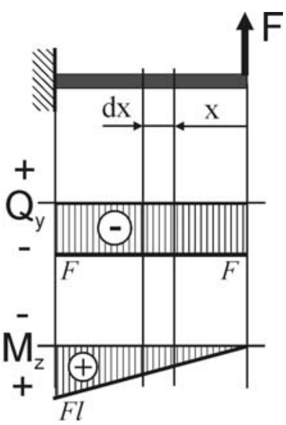
Нормальные напряжения при поперечном изгибе рассчитываются по тем же формулам, что и при чистом изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{J_z}; \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

Далее получим зависимости для определения касательных напряжений τ в случае поперечного изгиба балки.

При выводе формулы примем некоторые гипотезы, которые сделают данную задачу статически определимой:

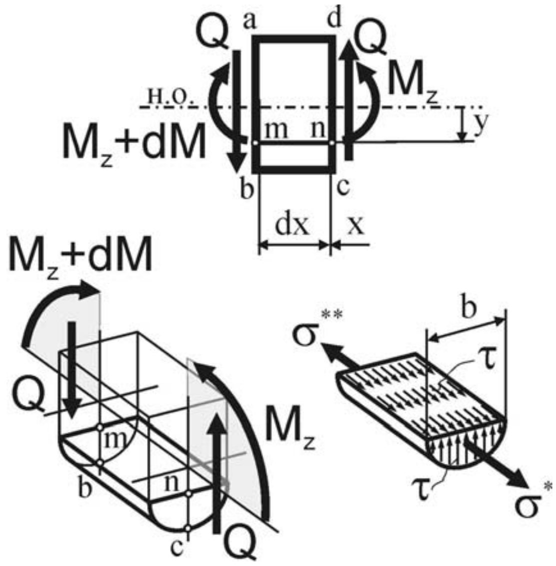
1) касательные напряжения, действующие на одинаковом расстоянии y от нейтральной оси, постоянны по ширине бруса;
2) касательные напряжения всюду параллельны силе Q.



Рассмотрим консольную балку, находящуюся в условиях поперечного изгиба под действием силы F. Построим эпюры внутренних усилий Q_y и M_z.

На расстоянии x от свободного конца балки выделим элементарный участок балки $abcd$ длиной dx и шириной, равной ширине балки b. Покажем внутренние усилия, действующие по граням элемента: на грани cd возникает поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z, а на грани ab – также поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z+dM (так как Q_y остается постоянной по длине балки, а момент M_z изменяется, см. эпюру).

На расстоянии y от нейтральной оси отсечем часть элемента *abcd*, покажем напряжения, действующие по граням полученного элемента *mbcn*, и рассмотрим его равновесие. На гранях, являющихся частью наружной поверхности балки, нет напряжений. На боковых гранях элемента от действия изгибающего момента M_z возникают нормальные напряжения σ^* и σ^{**}, причем



$$\sigma^* = \frac{M_z \cdot y}{J_z}; \qquad \sigma^{**} = \frac{\left(M_z + dM\right) \cdot y}{J_z}.$$

Кроме того, на этих гранях от действия поперечной силы Q_y возникают касательные напряжения τ, такие же напряжения возникают по закону парности касательных напряжений и на верхней грани элемента.

Составим уравнение равновесия элемента *mbcn*, проецируя равнодействующие рассмотренных напряжений на ось x:

$$\int_A \sigma^* \cdot dA - \int_A \sigma^{**} \cdot dA + \tau \cdot dx \cdot b = 0,$$

$$\int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot dA - \int_A \frac{dM \cdot y}{J_z} \cdot dA + \tau \cdot dx \cdot b = 0,$$

$$\tau \cdot dx \cdot b - \frac{dM}{J_z} \cdot \int_A y \cdot dA = 0.$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет собой ни что иное, как статический момент боковой грани элемента *mbcn* относительно оси z, поэтому можем записать

$$\tau = \frac{dM \cdot S_z'}{dx \cdot b \cdot J_z}.$$

Учитывая, что, согласно дифференциальным зависимостям Журавского Д. И. при изгибе,

$$Q = \frac{dM}{dx},$$

выражение для **касательных напряжений при поперечном изгибе** τ можем переписать следующим образом (**формула Журавского**)

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z'}{b \cdot J_z}. \qquad (10.10)$$

Проанализируем формулу Журавского (10.10). Здесь
$Q \equiv Q_y$ – поперечная сила в рассматриваемом сечении;
J_z – осевой момент инерции сечения относительно оси z;
b – ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения;
S_z' – статический момент относительно оси z части сечения, расположенной выше (или ниже) того волокна, где определяется касательное напряжение τ:

$$S_z' = \int_{y}^{y_{max}} y \cdot dA = y_c' \cdot A',$$

здесь y_c' и A' – координата центра тяжести и площадь рассматриваемой части сечения, соответственно.

10.6. Полная проверка прочности. Опасные сечения и опасные точки

Для проверки на прочность при изгибе по действующим на балку внешним нагрузкам строят эпюры изменения внутренних усилий (M_z, Q_y) по ее длине и определяют опасные сечения балки, для каждого из которых необходимо провести проверку прочности.

При полной проверке прочности таких сечений будет, как минимум, три (иногда они совпадают):
1) сечение, в котором изгибающий момент M_z достигает своего максимального по модулю значения, – именно по этому сечению подбирают сечение всей балки;
2) сечение, в котором поперечная сила Q_y достигает своего максимального по модулю значения;
3) сечение, в котором и изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y достигают по модулю достаточно больших величин.

В каждом из опасных сечений необходимо, построив эпюры нормальных и касательных напряжений, найти опасные точки сечения (проверка прочности проводится для каждой из них), которых также будет, как минимум, три:
1) точка, в которой нормальные напряжения σ_x достигают своего максимального значения, – то есть точка на наружной поверхности балки наиболее удаленная от нейтральной оси сечения;
2) точка, в которой касательные напряжения τ_{xy} достигают своего максимального значения, – точка, лежащая на нейтральной оси сечения;
3) точка, в которой и нормальные напряжения σ_x и касательные напряжения τ_{xy} достигают достаточно больших величин (эта проверка имеет смысл для сечений типа тавра или двутавра, где ширина резко изменяет свое значение).